TELEBACHILLERATO DE VERACRUZ

CUADERNILLO DE APOYO DOCENTE MATEMATICAS II

Segundo semestre

Bloque I

MODELO EDUCATIVO
PARA LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA

-Gonzalo Jácome Cortés

Estimada(o) maestra(o):

La Dirección General de Telebachillerato ha asumido el compromiso de dar a sus docentes un acompañamiento cercano. A la vez, sensible a sus necesidades pedagógicas y contextualizado a su realidad profesional.

A partir de esta visión institucional, la Subdirección Técnica y el Departamento Técnico Pedagógico ponen a su disposición este *“Cuadernillo de apoyo docente”*, para todas(os) aquellas(os) profesionales que sienten la necesidad de tener un respaldo más intenso y directo con respecto a los contenidos de las asignaturas. Esto, con el propósito de brindar un mejor servicio que lleve al desarrollo de los diversos talentos de sus estudiantes.

Cada tema, en el cuadernillo, se muestra en dos formas: primero, con ejemplos resueltos detalladamente en un lenguaje coloquial y fluido; posteriormente, se enlistan ejercicios que las(los) docentes pueden usar para ejercitarse en el dominio de ese tema y/o para aplicarlos en el salón de clases.

Estas actividades no pretenden sustituir a la “Guía didáctica” sino, por el contrario, complementar las explicaciones que ahí se tratan, para reforzarla. El espíritu de este esfuerzo académico es dotar de más herramientas, para que el proceso de co-aprendencia en el aula sea aún más eficiente.

Todos los canales de comunicación se encuentran abiertos para que, libremente, te expreses con respecto a la utilidad y perfectibilidad de este material. Así, por ejemplo, puedes escribir a los correos subtecnicatebaev@msev.gob.mx y ralvarez@msev.gob.mx donde, con mucho gusto, recibiremos tu realimentación.

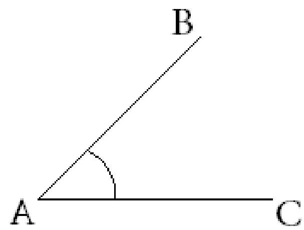
Con afecto.

Mtra. Iraís Dalila Reyes Cruz

Directora General

Ángulos

Un Ángulo es la abertura generada por dos semirrectas que tienen un origen común o también es la amplitud de rotación de una recta que gira por uno de sus puntos.



- ### Sistemas de medición

Los más utilizados son: sistema sexagesimal, el sistema centesimal y el sistema circular.

Sistema de medición de ángulos	Unidad de medida	Notación de la unidad mínima	Definición de la unidad de medida
Sexagesimal	Grado	1°	Es la unidad angular que divide una circunferencia en 360 partes iguales
Centesimal	Gradián	1^g	Es la unidad angular que divide una circunferencia en 400 partes iguales
Circular	Radián	1 rad	Es la unidad angular que divide una circunferencia en 2π partes iguales

Equivalencia entre sistemas de medición de ángulos:

$$360° = 400^g = 2\pi \text{ rad}$$

Con esta equivalencia, se puede transitar de un sistema de medición a otro.

Ejemplos

1. Convertir 720° (grados) a gradianes.

Para iniciar, se toma la equivalencia entre sistemas de medición de ángulos y se elige la parte a utilizar:

$$360° = 400^g = 2\pi \text{ rad}$$

Así, se trabajará solamente con la parte seleccionada.

Ahora, podemos efectuar una "regla de tres" directa. Si 360° equivalen a 400^g, entonces ¿720° a cuantos gradianes equivalen?

$$360° \rightarrow 400^g$$
$$720° \rightarrow x$$

La regla de tres nos pide multiplicar cruzado y el resultado dividirlo por el término restante.

$360° \rightarrow 400^g$ $720° \rightarrow x$	$x = \dfrac{(400^g)(720°)}{360°}$

Toma en cuenta que cualquier unidad o cantidad, al dividirse por sí misma da como resultado la unidad (es por ello que se dice coloquialmente que se "cancela"). En este caso es conveniente "cancelar" la unidad de grados en dicha ecuación y así continuar con la operación:

$$x = \frac{(400^g)(720\cancel{°})}{360\cancel{°}}$$

$$x = \frac{(400^g)(720)}{360}$$

Multiplicamos los 400^g por 720

$$x = \frac{288000^g}{360}$$

Dividimos 288000^g por 360:

$$x = 800^g$$

Por lo tanto, 720° (grados) equivalen a 800^g (gradianes).

El mismo ejemplo se puede resolver utilizando la noción de proporción. Una proporción es la igualdad entre dos razones. Una razón (geométrica) es el cociente (división) entre dos cantidades que están expresadas en las mismas unidades. De esta forma, si 360° equivalen a 400^g, entonces ¿720° a cuantos gradianes equivalen?, es necesario transformar la expresión en una proporción. Podemos expresar el primer miembro de la proporción (que a su vez es la primera razón) con los dos elementos que tienen la misma unidad, en este caso, las cantidades expresadas en grados:

$\frac{360°}{720°}$	Primera razón

El segundo término de la proporción (que a la vez es la segunda razón) será la que se expresa en gradianes:

$\frac{400^g}{x}$	Segunda razón

Nota que x representa la cantidad de gradianes a calcular. Con esto, la proporción quedaría:

$\frac{360°}{720°} = \frac{400^g}{x}$	Proporción

Despejamos la variable. Lo primero, ya que la variable se encuentra dividiendo, es “pasarla al otro lado” multiplicando (Formalmente multiplicamos ambos lados de la igualdad por el recíproco multiplicativo de $\frac{1}{x}$, es por ello que se dice que si está dividiendo de un lado de la igualdad pasa al otro lado multiplicando, conservando el mismo signo):

$$\frac{360°}{720°}=\frac{400^g}{x}$$

$$\frac{360°x}{720°}=400^g$$

Continuando con el despeje, la cantidad 720° que está dividiendo pasará multiplicando al otro lado de la igualdad:

$$360°x=\left(400^g\right)\left(720°\right)$$

Por último, la cantidad 360° que está multiplicando a la variable pasará dividiendo al otro lado de la igualdad:

$$x=\frac{\left(400^g\right)\left(720°\right)}{360°}$$

Realizamos las operaciones. En este caso es conveniente “cancelar” la unidad de grados en dicha ecuación y así continuar con la operación:

$$x=\frac{\left(400^g\right)\left(720\cancel{°}\right)}{360\cancel{°}}$$

$$x=\frac{\left(400^g\right)\left(720\right)}{360}$$

Multiplicamos los 400^g por 720

$$x=\frac{288000^g}{360}$$

Dividimos 288000^g por 360:

$$x=800^g$$

Por lo tanto, 720° (grados) equivalen a 800^g (gradianes).

¿Qué relación existe entre la expresión matemática generada por la regla de tres con la expresión matemática generada por la proporción?

Regla de tres directa	Proporción
$360°\to 400^g$ $720°\to x$	$\frac{360°}{720°}=\frac{400^g}{x}$

Efectivamente, son equivalentes.

2. Convertir 100^g (gradianes) a radianes.

Se toma la equivalencia entre sistemas de medición de ángulos y se elige la parte a utilizar:

$$360° = 400^g = 2\pi \text{ rad}$$

Así, se trabajará solamente con la parte seleccionada.

Ahora, podemos efectuar una "regla de tres" directa. Si 400^g equivalen a 2π rad, entonces ¿100^g a cuantos radianes equivalen?

$$400^g \to 2\pi\, rad$$

$$100^g \to x$$

La regla de tres nos pide multiplicar cruzado y el resultado dividirlo por el término restante.

$400^g \to 2\pi\, rad$ $100^g \to x$	$x = \dfrac{(2\pi\ rad)(100^g)}{400^g}$

Toma en cuenta que cualquier unidad o cantidad, al dividirse por sí misma da como resultado la unidad (es por ello que se dice coloquialmente que se "cancela"). En este caso es conveniente "cancelar" la unidad de gradianes en dicha ecuación y así continuar con la operación:

$$x = \frac{(2\pi\ rad)(100^g)}{400^g}$$

$$x = \frac{(2\pi\, rad\,)(100)}{400}$$

Multiplicamos los $2\pi\, rad$ por 100

$$x = \frac{200\pi\, rad}{400}$$

Dividimos $200\pi\, rad$ por 400:

$$x = \frac{1}{2}\pi\, rad$$

Por lo tanto, 100^g (gradianes) equivalen a $\frac{1}{2}\pi\, rad$ (radianes).

El mismo ejemplo se puede resolver utilizando la noción de proporción. Como una proporción es la igualdad entre dos razones, y una razón (geométrica) es el cociente entre dos cantidades que están expresadas en las mismas unidades, entonces transformaremos la expresión en una proporción. El primer miembro de la proporción (que a su vez es la primera razón) será:

$\frac{400^g}{100^g}$	Primera razón

El segundo término de la proporción (que a la vez es la segunda razón) será:

$\frac{2\pi\, rad}{x}$	Segunda razón

Con esto, la proporción quedaría:

$\frac{400^g}{100^g} = \frac{2\pi\, rad}{x}$	Proporción

Despejamos la variable. Lo primero, ya que la variable se encuentra dividiendo, es “pasarla al otro lado” multiplicando (Como se mencionó anteriormente, formalmente multiplicamos ambos lados de la igualdad por el recíproco multiplicativo de $\frac{1}{x}$):

$$\frac{400^g}{100^g} = \frac{2\pi\, rad}{x}$$

$$\frac{400^g x}{100^g} = 2\pi\ rad$$

Continuando con el despeje, la cantidad 100^g que está dividiendo pasará multiplicando al otro lado de la igualdad:

$$400^g x = \left(2\pi\ rad\right)\left(100^g\right)$$

Por último, la cantidad 400^g que está multiplicando a la variable pasará dividiendo al otro lado de la igualdad:

$$x = \frac{(2\pi\ rad)(100^g)}{400^g}$$

Realizando las operaciones, se "cancela" la unidad de gradianes en dicha ecuación y así continuar con la operación:

$$x = \frac{(2\pi\ rad)(100^{\cancel{g}})}{400^{\cancel{g}}}$$

$$x = \frac{(2\pi\, rad)(100)}{400}$$

Multiplicamos los $2\pi\, rad$ por 100

$$x = \frac{200\pi\, rad}{400}$$

Dividimos $200\pi\, rad$ por 400:

$$x = \frac{1}{2}\pi\, rad$$

Por lo tanto, 100^g (gradianes) equivalen a $\frac{1}{2}\pi\, rad$ (radianes).

Nota: el resultado no necesariamente puede expresarse en términos del número π. Como π es un número (3.141592…) podemos multiplicar $\frac{1}{2}$ *por π:*

$$x = \frac{1}{2}\pi\, rad$$

$$x = \frac{1}{2}(3.141592)\ rad$$

$$x = 1.57\ rad$$

Por lo tanto la expresión $x = \frac{1}{2}\pi\, rad$ *equivale a la expresión* $x = 1.57\ rad$ *(radianes).*

3. Convertir $\frac{5}{2}\pi rad$ (radianes) a grados.

Se toma la equivalencia entre sistemas de medición de ángulos y se elige la parte a utilizar:

$$360° = 400^g = 2\pi \text{ rad}$$

Así, se trabajará solamente con la parte seleccionada.

Ahora, podemos efectuar una "regla de tres" directa. Si 2π rad equivalen a 360°, entonces ¿ $\frac{5}{2}\pi rad$ a cuántos grados equivalen?

$$2\pi rad \rightarrow 360°$$
$$\frac{5}{2}\pi rad \rightarrow x$$

La regla de tres nos pide multiplicar cruzado y el resultado dividirlo por el término restante.

$2\pi \ rad \rightarrow 360°$ $\frac{5}{2}\pi rad \rightarrow x$	$x = \dfrac{(360°)\left(\frac{5}{2}\pi rad\right)}{2\pi r}$

Toma en cuenta que cualquier unidad o cantidad, al dividirse por sí misma da como resultado la unidad (es por ello que se dice coloquialmente que se "cancelan"). En este caso es conveniente "cancelar" el número π y la unidad de radianes en dicha ecuación y así continuar con la operación:

$$x = \frac{(360°)\left(\frac{5}{2}\cancel{\pi}\cancel{rad}\right)}{2\cancel{\pi}\cancel{rad}}$$

$$x = \frac{(360°)\left(\frac{5}{2}\right)}{2}$$

Multiplicamos los 360° por $\frac{5}{2}$

$$x = \frac{\left(\frac{1800°}{2}\right)}{2}$$

$$x = \frac{900°}{2}$$

Para finalizar, dividimos 900° por 2:

$$x = 450°$$

Por lo tanto, $\frac{5}{2}\pi\, rad$ (radianes) equivalen a 450° (grados).

El mismo ejemplo se puede resolver utilizando la noción de proporción. Como una proporción es la igualdad entre dos razones, y una razón (geométrica) es el cociente entre dos cantidades que están expresadas en las mismas unidades, entonces transformaremos la expresión en una proporción. El primer miembro de la proporción (que a su vez es la primera razón) será:

$\frac{2\pi\, rad}{\frac{5}{2}\pi\, rad}$	Primera razón

El segundo término de la proporción (que a la vez es la segunda razón) será:

$\frac{360°}{x}$	Segunda razón

Con esto, la proporción quedaría:

$\frac{2\pi\, rad}{\frac{5}{2}\pi\, rad} = \frac{360°}{x}$	Proporción

Despejamos la variable. Lo primero, ya que la variable se encuentra dividiendo, es “pasarla al otro lado” multiplicando:

$$\frac{2\pi\ rad}{\frac{5}{2}\pi\ rad}=\frac{360°}{x}$$

$$\frac{2\pi\, rad\, x}{\frac{5}{2}\pi\, rad}=360°$$

Continuando con el despeje, la cantidad $\frac{5}{2}\pi\ rad$ que está dividiendo pasará multiplicando al otro lado de la igualdad:

$$2\pi\, rad\, x=(360°)\left(\frac{5}{2}\pi\, rad\right)$$

Por último, la cantidad $2\pi\, rad$ que está multiplicando a la variable pasará dividiendo al otro lado de la igualdad:

$$x=\frac{(360°)\left(\frac{5}{2}\pi\, rad\right)}{2\pi\, rad}$$

Realizando las operaciones. En este caso es conveniente "cancelar" el número π y la unidad de radianes en dicha ecuación y así continuar con la operación:

$$x=\frac{(360°)\left(\frac{5}{2}\cancel{\pi}\,\cancel{rad}\right)}{2\cancel{\pi}\,\cancel{rad}}$$

$$x=\frac{(360°)\left(\frac{5}{2}\right)}{2}$$

Multiplicamos los 360° por $\frac{5}{2}$

$$x=\frac{\left(\frac{1800°}{2}\right)}{2}$$

$$x=\frac{900°}{2}$$

Para finalizar, dividimos 900° por 2:

$$x=450°$$

Por lo tanto, $\frac{5}{2}\pi\, rad$ (radianes) equivalen a 450° (grados).

4. Convertir $8.5\ rad$ (radianes) a gradianes.

Se toma la equivalencia entre sistemas de medición de ángulos y se elige la parte a utilizar:

$$360° = 400^g = 2\pi \text{ rad}$$

Así, se trabajará solamente con la parte seleccionada.

Ahora, podemos efectuar una "regla de tres" directa. Si 2π rad equivalen a 400^g, entonces ¿ $8.5\ rad$ a cuántos gradianes equivalen?

$$2\pi\, rad \rightarrow 400^g$$
$$8.5\ rad \rightarrow x$$

La regla de tres nos pide multiplicar cruzado y el resultado dividirlo por el término restante.

$2\pi\, rad \rightarrow 400^g$ $8.5\ rad \rightarrow x$	$x = \dfrac{\left(400^g\right)\left(8.5\ rad\right)}{2\pi\, rad}$

Toma en cuenta que cualquier unidad o cantidad, al dividirse por sí misma da como resultado la unidad (es por ello que se dice coloquialmente que se "cancelan"). En este caso es conveniente "cancelar" la unidad de radianes en dicha ecuación y así continuar con la operación:

$$x = \frac{\left(400^g\right)\left(8.5\ \cancel{rad}\right)}{2\pi\, \cancel{rad}}$$
$$x = \frac{\left(400^g\right)\left(8.5\right)}{2\pi}$$

Multiplicamos los 400^g por 8.5:

$$x = \frac{3400^g}{2\pi}$$

Multiplicamos 2 por π (observa que, como 8.5 radianes no está en función de π, no se pudo "cancelar"):

$$x = \frac{3400^g}{6.283185}$$

Para finalizar, dividimos por 6.283185:

$$x = 541.12^g$$

Por lo tanto, $8.5\ rad$ (radianes) equivalen a 541.12^g (gradianes).

El mismo ejemplo se puede resolver utilizando la noción de proporción. Como una proporción es la igualdad entre dos razones, y una razón (geométrica) es el cociente entre dos cantidades que están expresadas en las mismas unidades, entonces transformaremos la expresión en una proporción. El primer miembro de la proporción (que a su vez es la primera razón) será:

$\dfrac{2\pi\, rad}{8.5\, rad}$	Primera razón

El segundo término de la proporción (que a la vez es la segunda razón) será:

$\dfrac{400^g}{x}$	Segunda razón

Con esto, la proporción quedaría:

$\dfrac{2\pi\, rad}{8.5\, rad} = \dfrac{400^g}{x}$	Proporción

Despejamos la variable. Lo primero, ya que la variable se encuentra dividiendo, es “pasarla al otro lado” multiplicando:

$$\frac{2\pi\ rad}{8.5\, rad} = \frac{400^g}{x}$$

$$\frac{2\pi\, rad\, x}{8.5\ rad} = 400^g$$

Continuando con el despeje, la cantidad $8.5\, rad$ que está dividiendo pasará multiplicando al otro lado de la igualdad:

$$2\pi\ rad\ x = \left(400^g\right)\left(8.5\, rad\right)$$

Por último, la cantidad $2\pi\, rad$ que está multiplicando a la variable pasará dividiendo al otro lado de la igualdad:

$$x=\frac{\left(400^g\right)\left(8.5\,rad\right)}{2\pi\,rad}$$

Realizando las operaciones. En este caso es conveniente “cancelar” la unidad de radianes en dicha ecuación y así continuar con la operación:

$$x=\frac{\left(400^g\right)\left(8.5\,\cancel{rad}\right)}{2\pi\,\cancel{rad}}$$

$$x=\frac{\left(400^g\right)\left(8.5\right)}{2\pi}$$

Multiplicamos los 400^g por 8.5:

$$x=\frac{3400^g}{2\pi}$$

Multiplicamos 2 por π (observa que, como 8.5 radianes no está en función de π, no se pudo “cancelar”):

$$x=\frac{3400^g}{6.283185}$$

Para finalizar, dividimos por 6.283185:

$$x=541.12^g$$

Por lo tanto, $8.5\,rad$ (radianes) equivalen a 541.12^g (gradianes).

Ejercicios.

1. Convertir 48° (grados) a gradianes.

2. Convertir 2160° (grados) a radianes.

3. Convertir 329^g gradianes a grados.

4. Convertir 578^g gradianes a radianes.

***5.* Convertir $\frac{7}{2}\pi rad$ (radianes) a grados.**

***6.* Convertir $\frac{4}{3}\pi rad$ (radianes) a gradianes.**

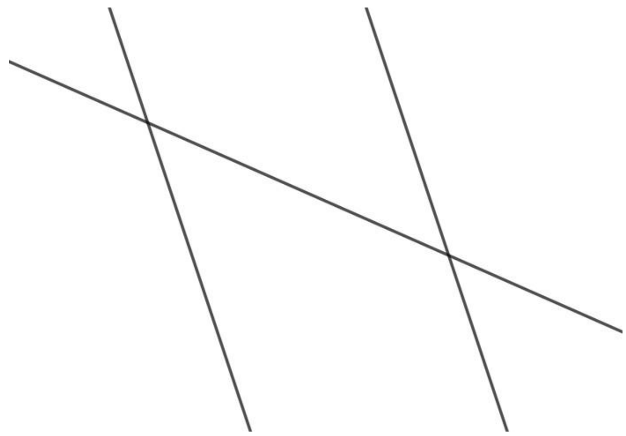
7. Convertir $12\,rad$ (radianes) a grados.

8. Convertir $\frac{1}{3}rad$ (radianes) a gradianes

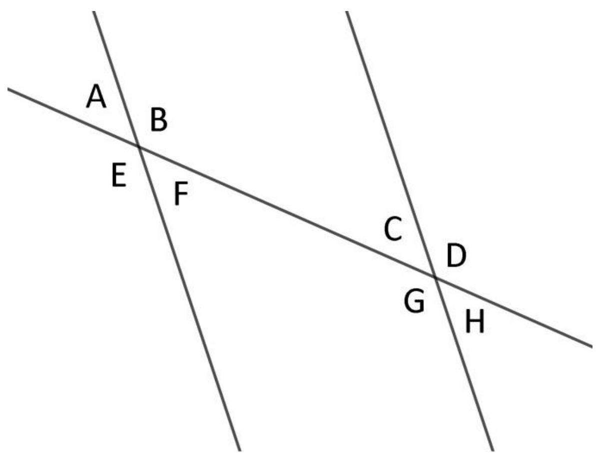
- **Rectas paralelas cortadas por una transversal**

Ejemplos

1. Del siguiente sistema de rectas, identifica los ángulos (si los hubiera) que se te indican: Alternos internos, Alternos externos, Colaterales internos, Colaterales externos, Correspondientes.



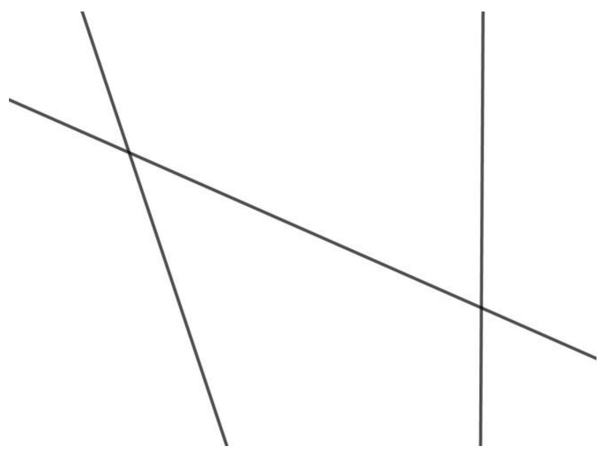
Esta clasificación de ángulos se da para un sistema de rectas formado por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Verificado esto, conviene representar a cada ángulo con alguna letra o número (el orden de colocación es indistinto):



Así:

Alternos internos	$\sphericalangle B$ y $\sphericalangle G$ $\sphericalangle F$ y $\sphericalangle C$
Alternos externos	$\sphericalangle A$ y $\sphericalangle H$ $\sphericalangle E$ y $\sphericalangle D$
Colaterales internos	$\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ $\sphericalangle F$ y $\sphericalangle G$
Colaterales externos	$\sphericalangle A$ y $\sphericalangle D$ $\sphericalangle E$ y $\sphericalangle H$
Correspondientes	$\sphericalangle A$ y $\sphericalangle C$ $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle D$ $\sphericalangle E$ y $\sphericalangle G$ $\sphericalangle F$ y $\sphericalangle H$

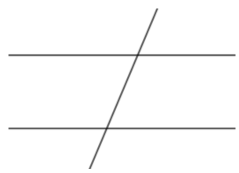
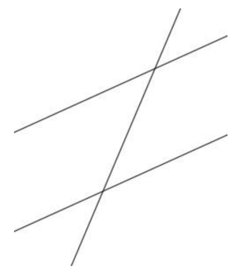
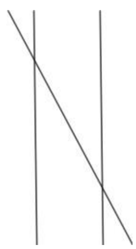
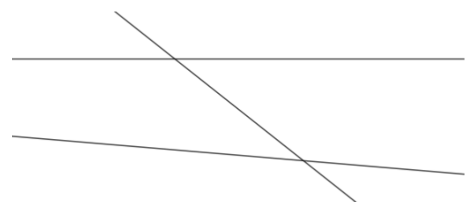
2. Del siguiente sistema de rectas, identifica los ángulos (si los hubiera) que se te indican: Alternos internos, Alternos externos, Colaterales internos, Colaterales externos, Correspondientes.



Esta clasificación de ángulos se da para un sistema de rectas formado por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Como podemos observar, no hay rectas paralelas en este sistema de rectas, por lo tanto, no es posible clasificar a los ángulos bajo el criterio correspondiente.

Ejercicios.

Del siguiente sistema de rectas, identifica los ángulos (si los hubiera) que se te indican: Alternos internos, Alternos externos, Colaterales internos, Colaterales externos, Correspondientes.

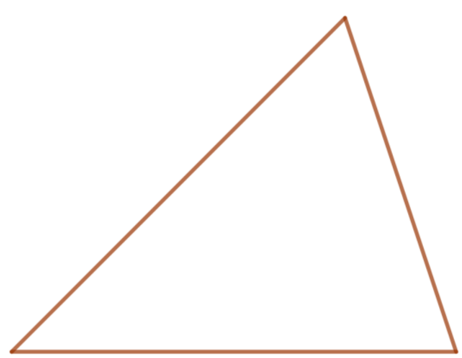
1. 	**2.** 
3. 	**4.** 

Triángulos

- **Rectas y puntos notables**

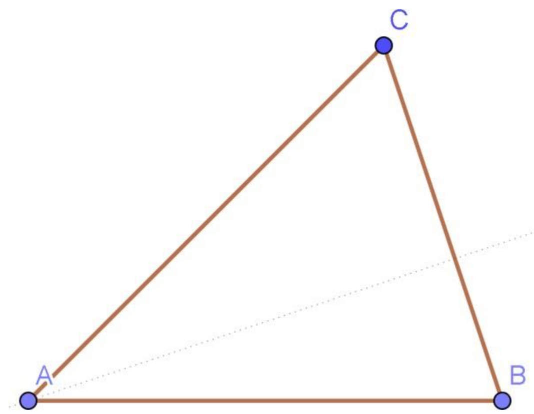
Ejemplos

1. Traza la Recta de Euler en el siguiente triángulo.

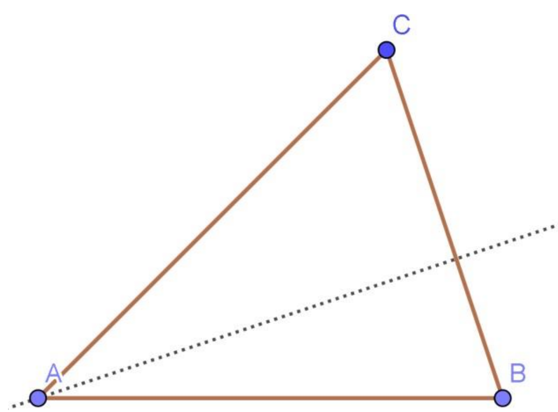


La Recta de Euler es la línea recta que une al ortocentro, al baricentro y al circuncentro en todo triángulo. Por lo que para trazar dicha recta, es necesario primero trazar los puntos notables. Empecemos por el ortocentro.

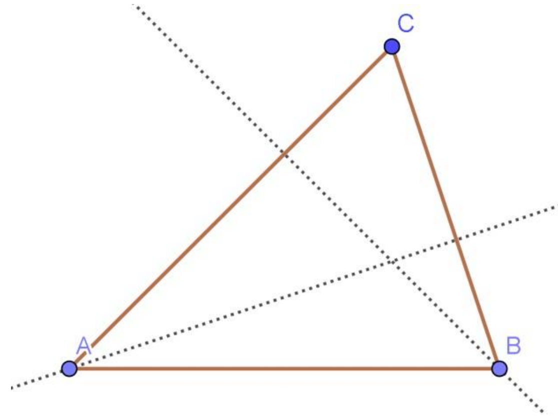
El ortocentro es el punto de intersección de las tres alturas del triángulo. La altura de un triángulo es el segmento de recta que pasa por alguno de los vértices de dicho triángulo y es perpendicular al lado opuesto. Tracemos las alturas del triángulo. Llamemos A, B y C a los vértices del triángulo:



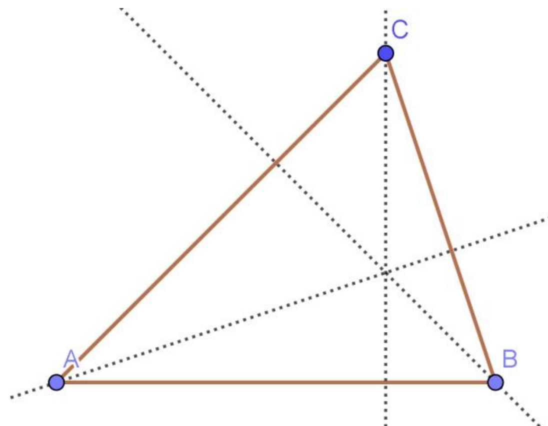
Se traza la perpendicular al segmento $\overline{BC}$ que pase por el punto A:



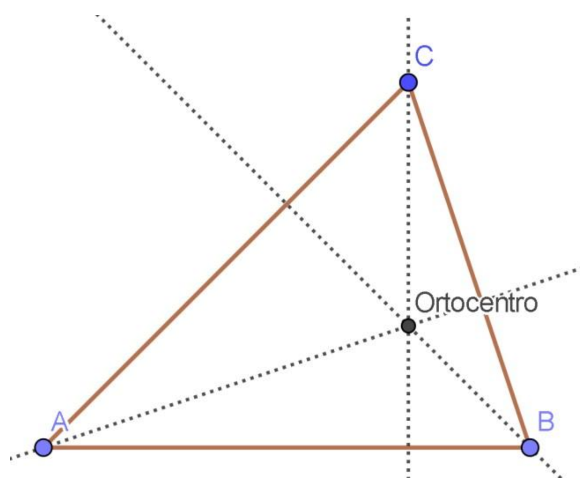
Sobre el mismo triángulo, tracemos ahora la perpendicular al segmento $\overline{AC}$ que pase por el punto B:



Ahora tracemos la perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pase por el punto C:



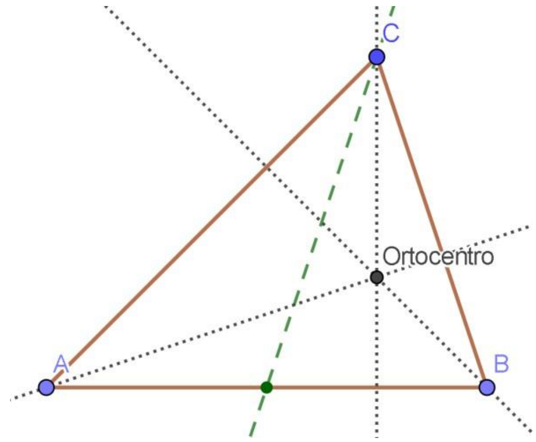
Marquemos con un punto (digamos gris) el lugar donde se intersectan las tres alturas. Ese lugar se conoce como ortocentro:



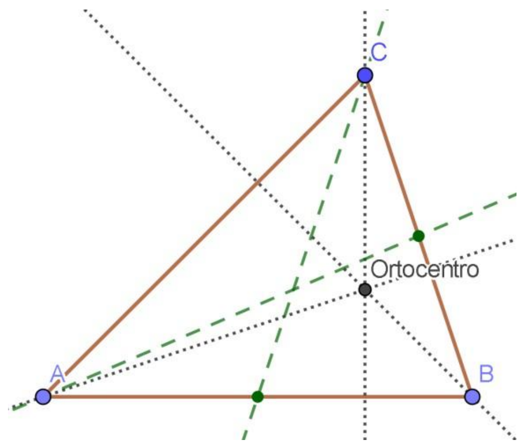
Tracemos ahora el baricentro.

El baricentro es el punto que se localiza en la intersección de las medianas. La mediana es el segmento de recta que une el punto medio del lado de un triángulo con el vértice opuesto.

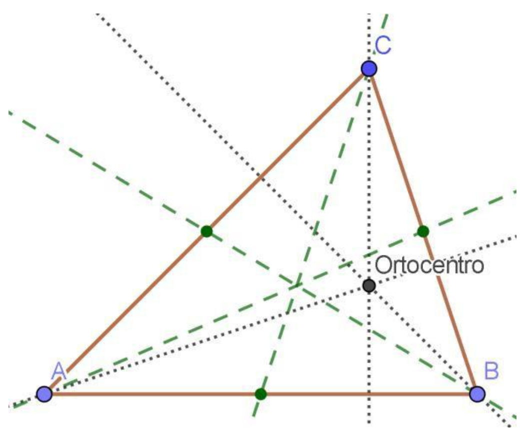
Sobre el mismo triángulo que hemos trabajado, tracemos el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y coloquemos un segmento de recta que una dicho punto medio con el vértice C:



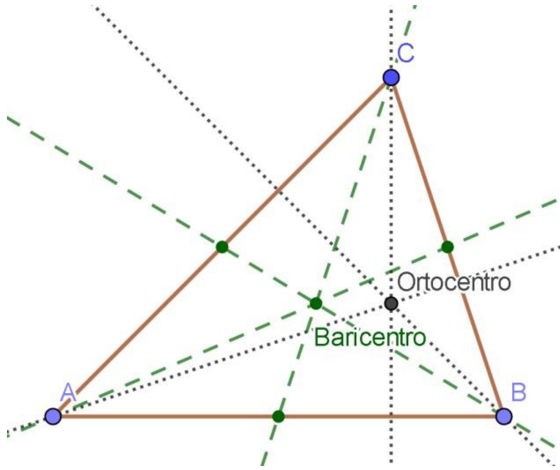
Se traza el punto medio del segmento $\overline{BC}$ y se coloca un segmento que una dicho punto medio con el vértice A:



Ahora tracemos el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y se coloca un segmento que una dicho punto medio con el vértice B:

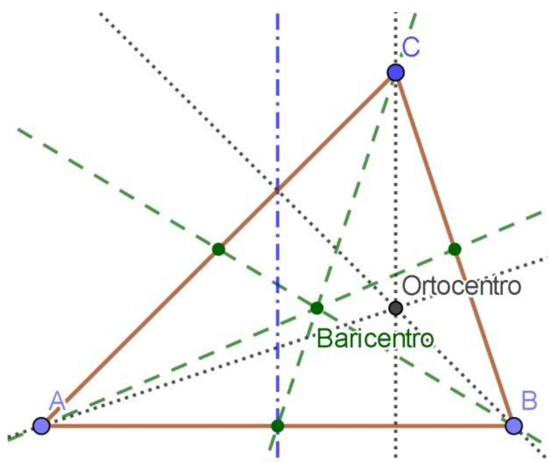


Marquemos con un punto (digamos verde) el lugar donde se intersectan las tres medianas. Ese lugar se conoce como baricentro:

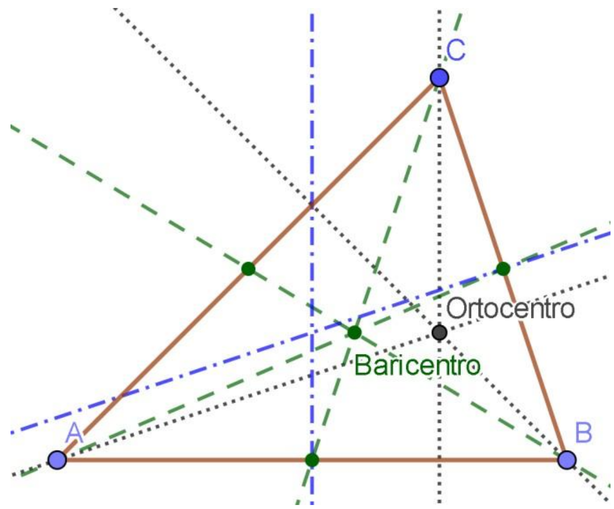


Por último, tracemos el circuncentro. El circuncentro es el punto que se sitúa en la intersección de las mediatrices. La mediatriz es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado de un triángulo.

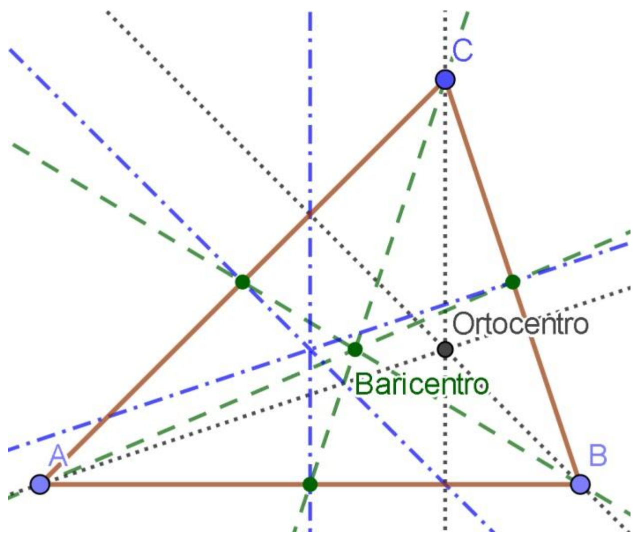
Sobre el mismo triángulo que hemos trabajado, tracemos la perpendicular del segmento $\overline{AB}$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento:



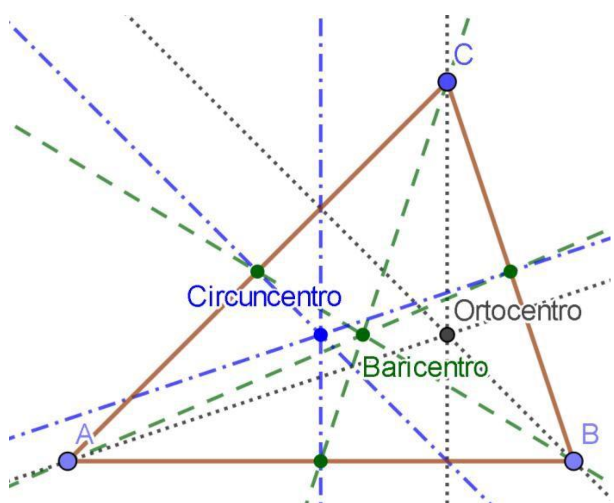
Tracemos la perpendicular del segmento $\overline{BC}$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento:



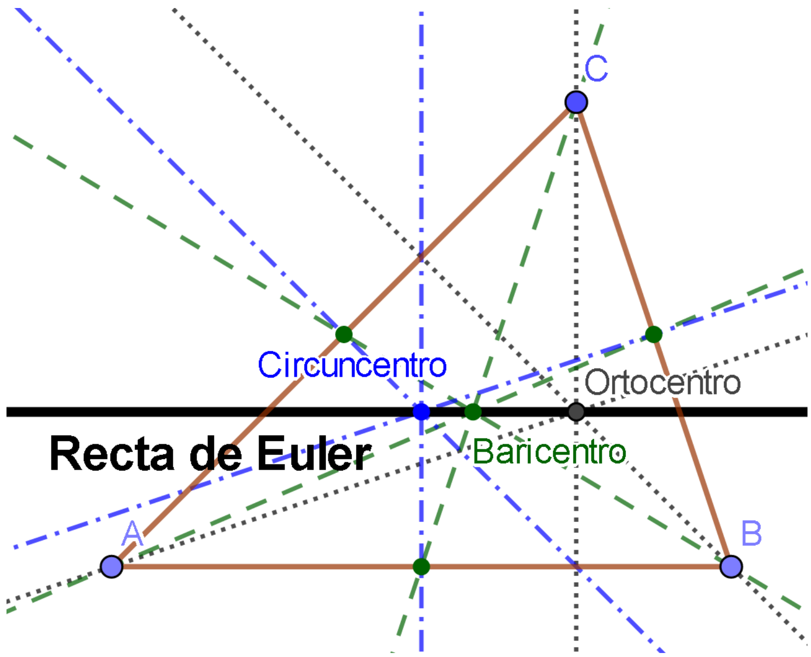
Por último, tracemos la perpendicular del segmento $\overline{AC}$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento:



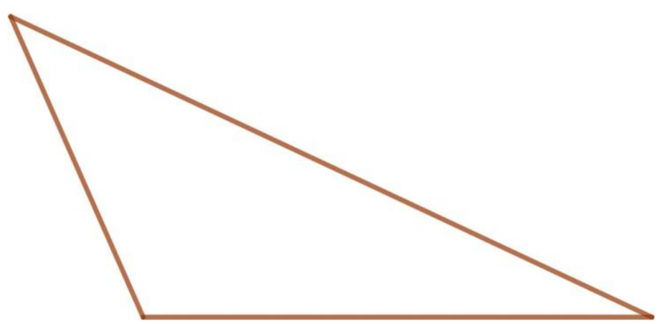
Marquemos con un punto (digamos azul) el lugar donde se intersectan las tres mediatrices. Ese lugar se conoce como circuncentro:



Una vez trazados los tres puntos notables (ortocentro, baricentro y circuncentro) se unen con una línea recta. Dicha recta es conocida como Recta de Euler.

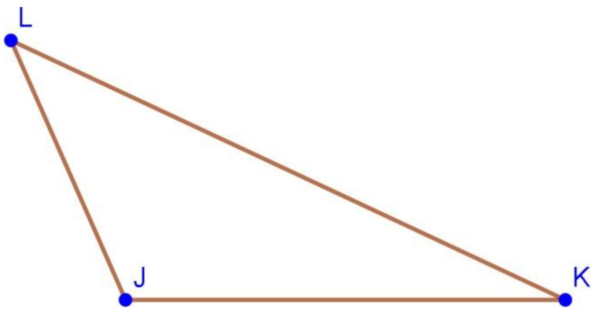


2. Traza la Recta de Euler en el siguiente triángulo.

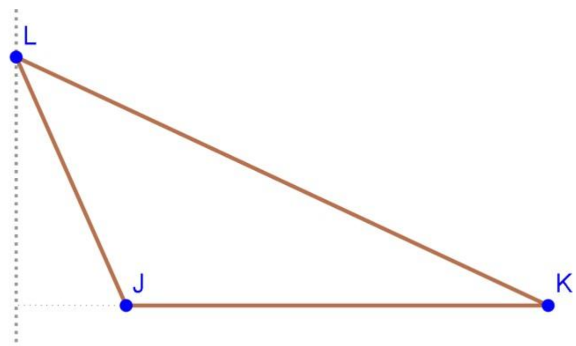


La Recta de Euler es la línea recta que une al ortocentro, al baricentro y al circuncentro en todo triángulo. Por lo que para trazar dicha recta, es necesario primero trazar los puntos notables. Empecemos por el ortocentro.

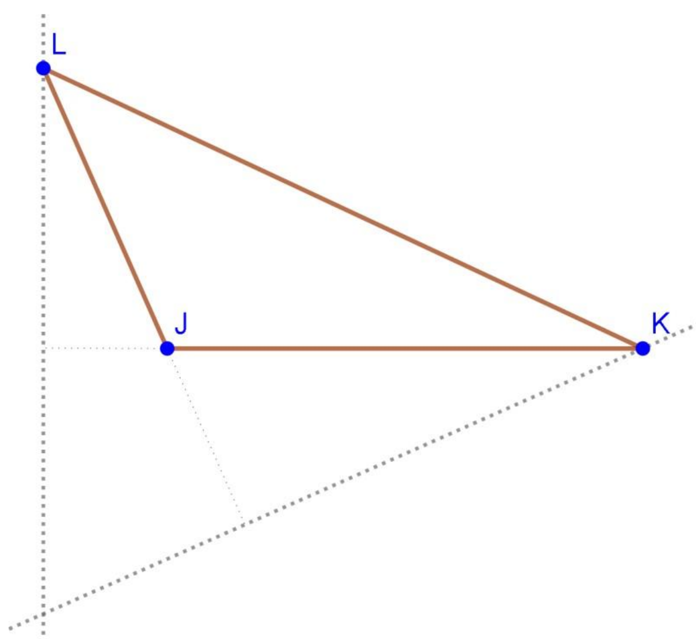
El ortocentro es el punto de intersección de las tres alturas del triángulo. La altura de un triángulo es el segmento de recta que pasa por alguno de los vértices de dicho triángulo y es perpendicular al lado opuesto. Tracemos las alturas del triángulo. Llamemos J, K y L a los vértices del triángulo:



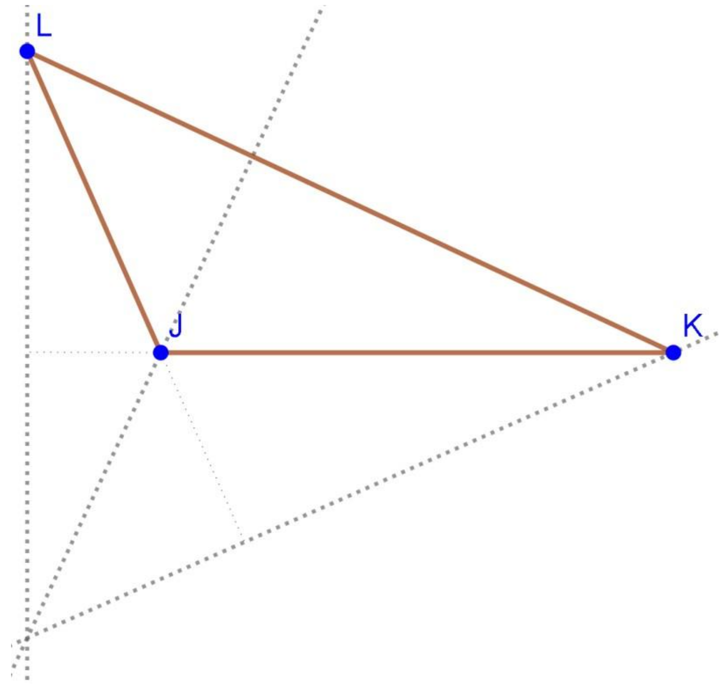
Se traza la perpendicular al segmento $\overline{JK}$ (en este caso a la prolongación del segmento) que pase por el punto L:



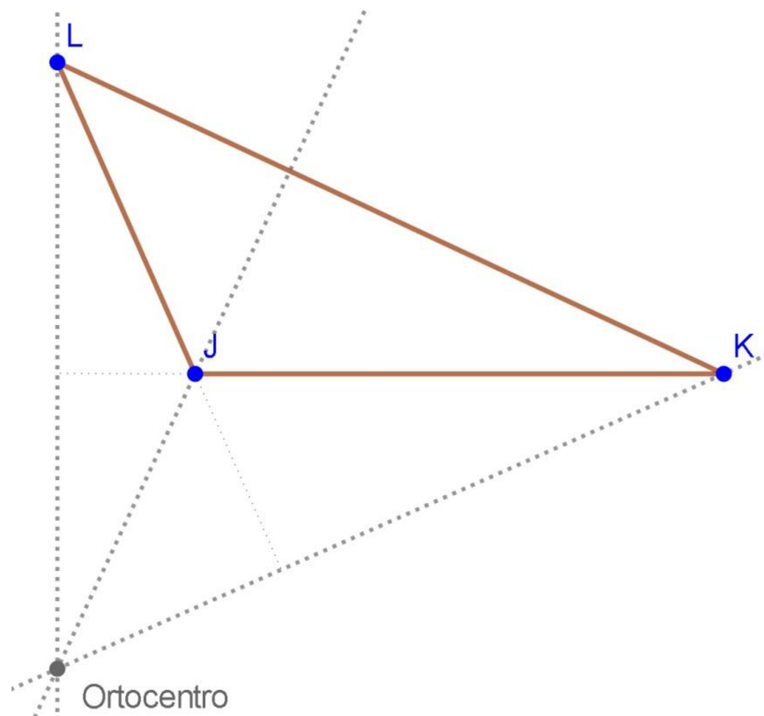
Sobre el mismo triángulo, tracemos ahora la perpendicular al segmento $\overline{JL}$ (o a su prolongación) que pase por el punto K:



Ahora tracemos la perpendicular al segmento $\overline{KL}$ que pase por el punto J:



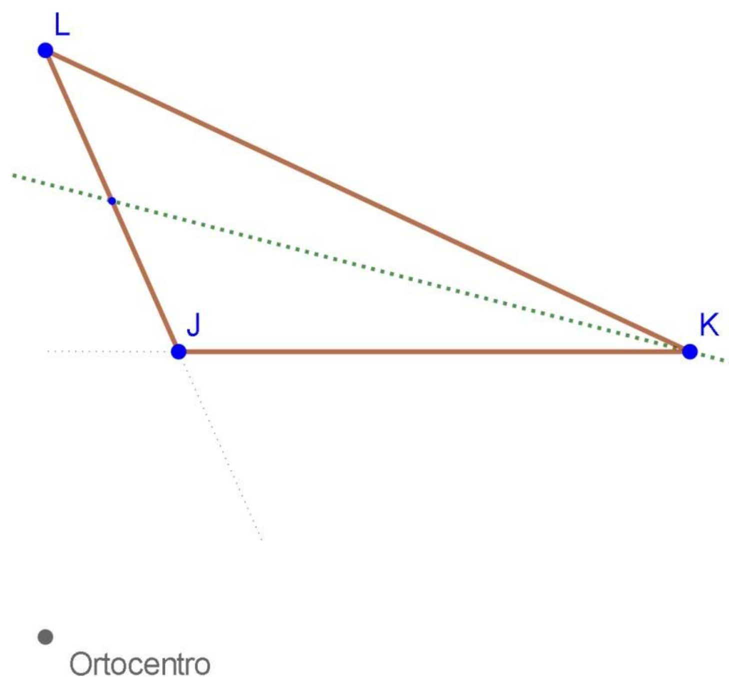
Marquemos con un punto (digamos gris) el lugar donde se intersectan las tres alturas. Ese lugar se conoce como ortocentro:



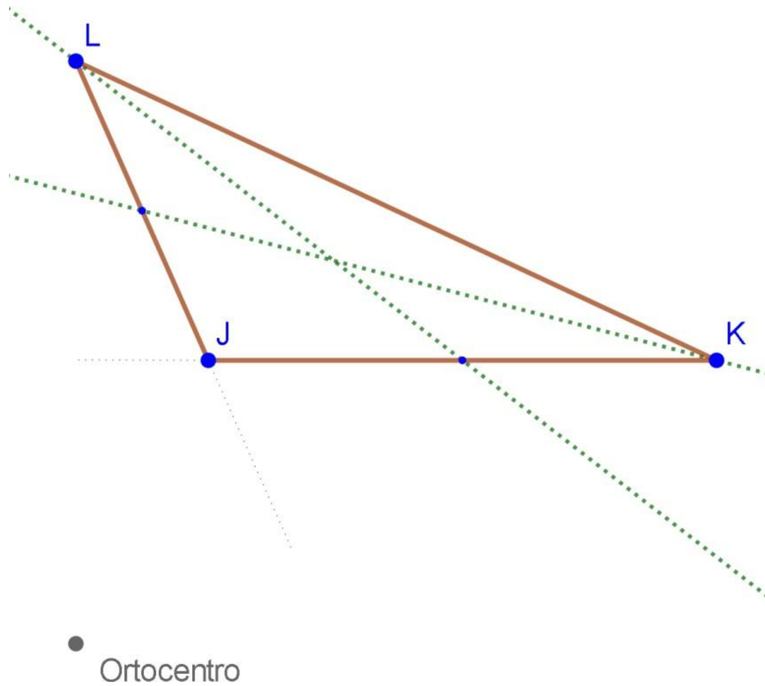
Tracemos ahora el baricentro.

El baricentro es el punto que se localiza en la intersección de las medianas. La mediana es el segmento de recta que une el punto medio del lado de un triángulo con el vértice opuesto.

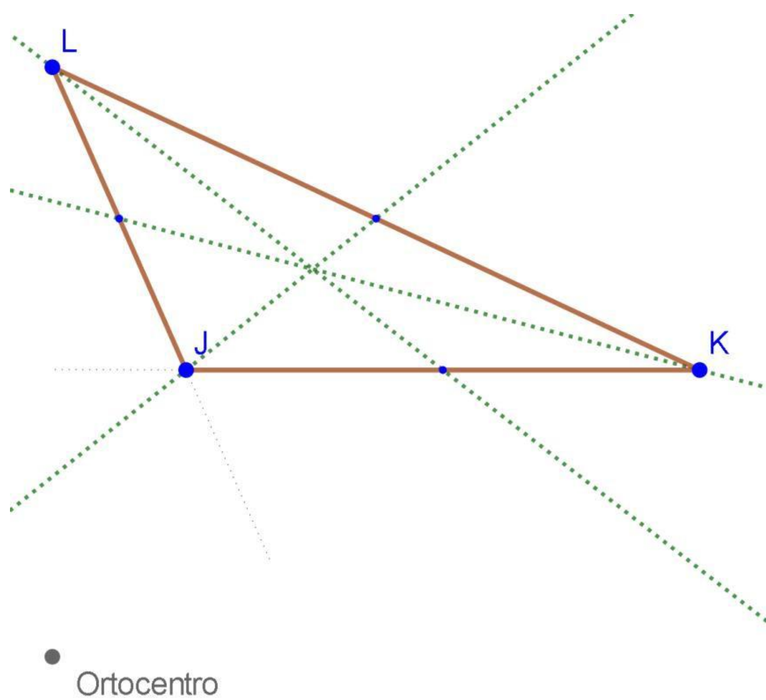
Se trabajará sobre el mismo triángulo, sin embargo, ya solo se dejará el ortocentro y se eliminarán los trazos que lo generaron. Tracemos el punto medio del segmento $\overline{JL}$ y coloquemos un segmento de recta que una dicho punto medio con el vértice K:



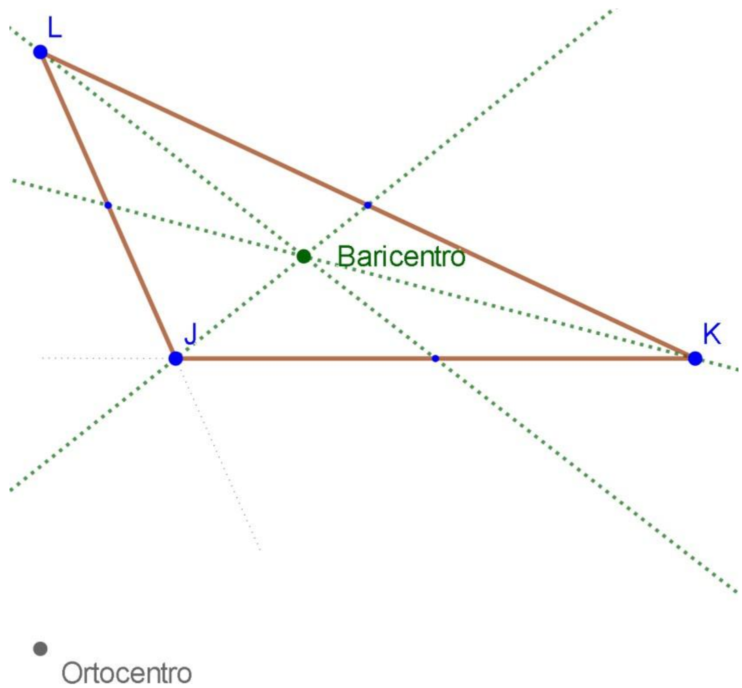
Se traza el punto medio del segmento $\overline{JK}$ y se coloca un segmento que una dicho punto medio con el vértice L:



Ahora tracemos el punto medio del segmento $\overline{KL}$ y se coloca un segmento que una dicho punto medio con el vértice J:

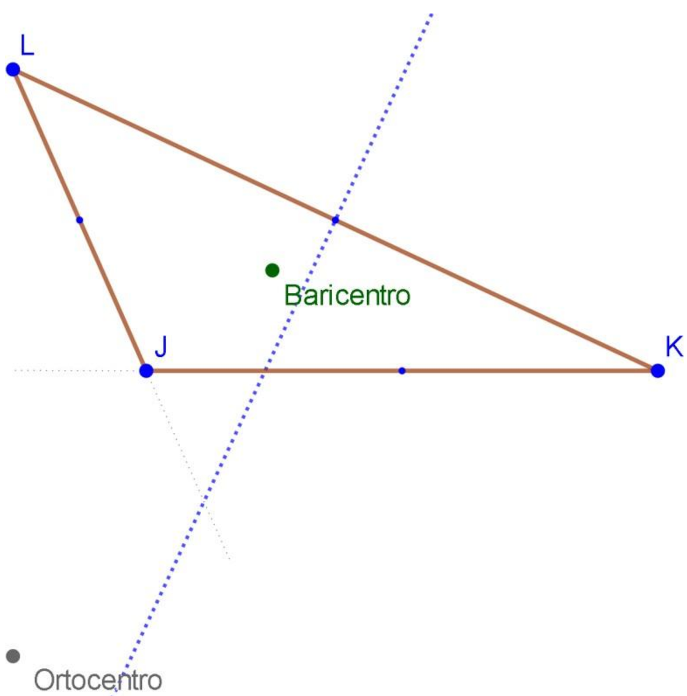


Marquemos con un punto (digamos verde) el lugar donde se intersectan las tres medianas. Ese lugar se conoce como baricentro:

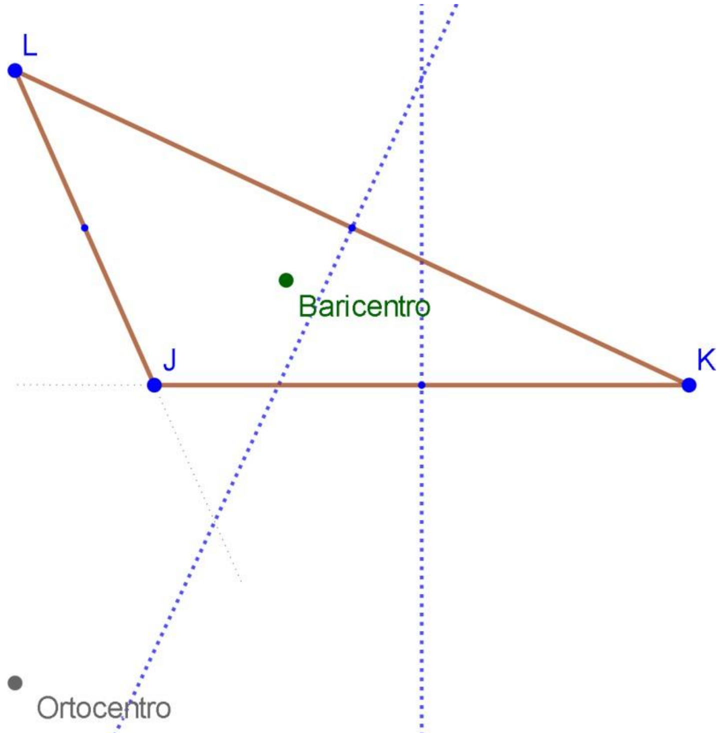


Por último, tracemos el circuncentro. El circuncentro es el punto que se sitúa en la intersección de las mediatrices. La mediatriz es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado de un triángulo.

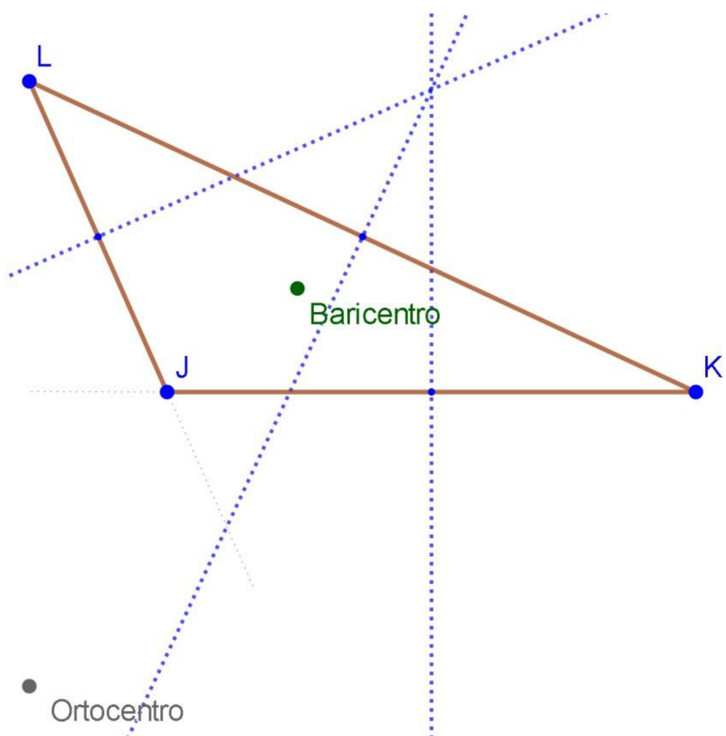
Sobre el mismo triángulo que hemos trabajado, tracemos la perpendicular del segmento $\overline{KL}$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento:



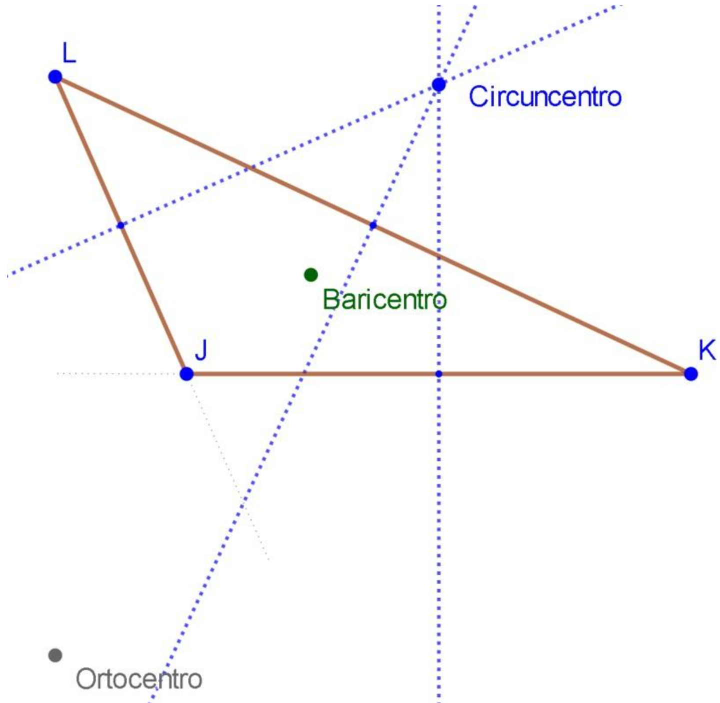
Tracemos la perpendicular del segmento $\overline{JK}$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento:



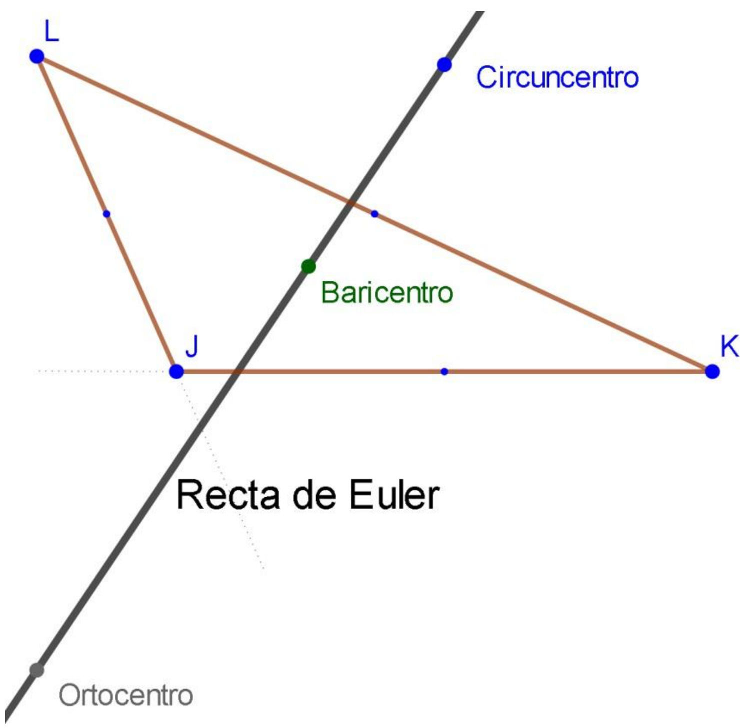
Por último, tracemos la perpendicular del segmento $\overline{JL}$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento:



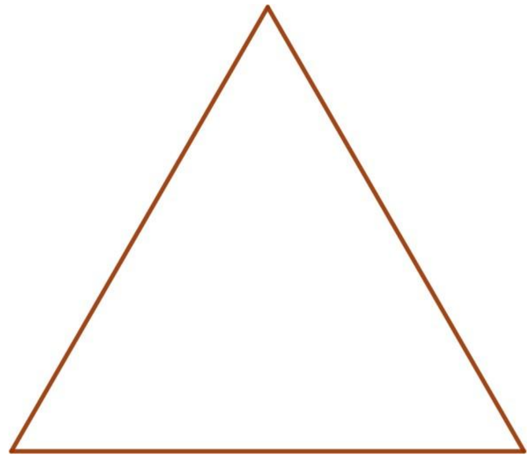
Marquemos con un punto (digamos azul) el lugar donde se intersectan las tres mediatrices. Ese lugar se conoce como circuncentro:



Una vez trazados los tres puntos notables (ortocentro, baricentro y circuncentro) se une con una línea recta. Dicha recta es conocida como Recta de Euler.

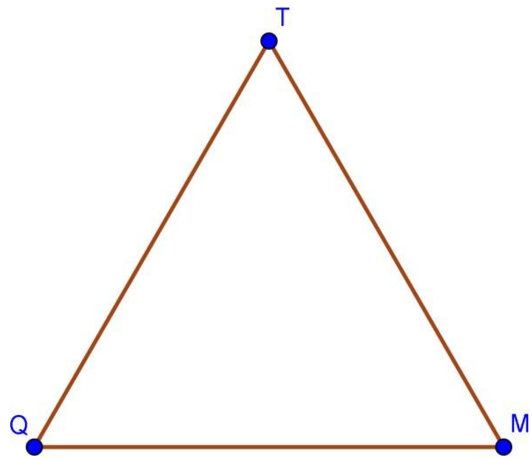


3. Traza la Recta de Euler en el siguiente triángulo equilátero.

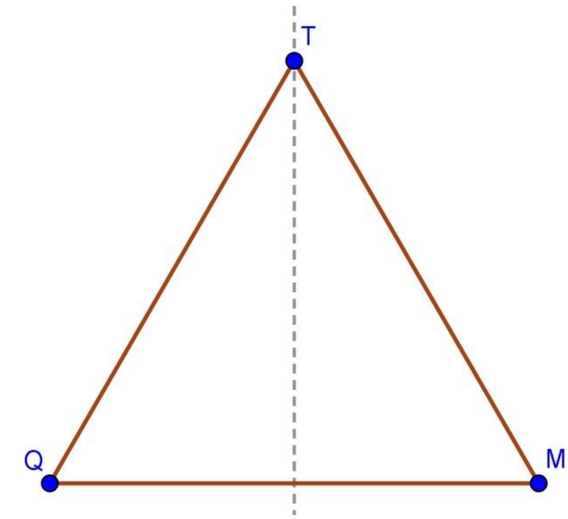


La Recta de Euler es la línea recta que une al ortocentro, al baricentro y al circuncentro en todo triángulo. Por lo que para trazar dicha recta, es necesario primero trazar los puntos notables. Empecemos por el ortocentro.

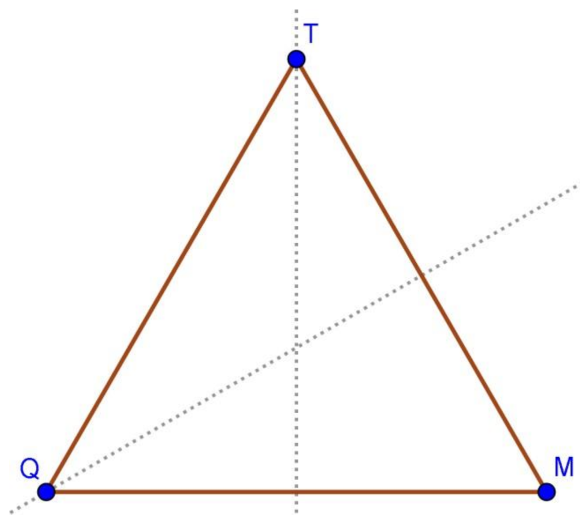
El ortocentro es el punto de intersección de las tres alturas del triángulo. La altura de un triángulo es el segmento de recta que pasa por alguno de los vértices de dicho triángulo y es perpendicular al lado opuesto. Tracemos las alturas del triángulo. Llamemos Q, M y T a los vértices del triángulo:



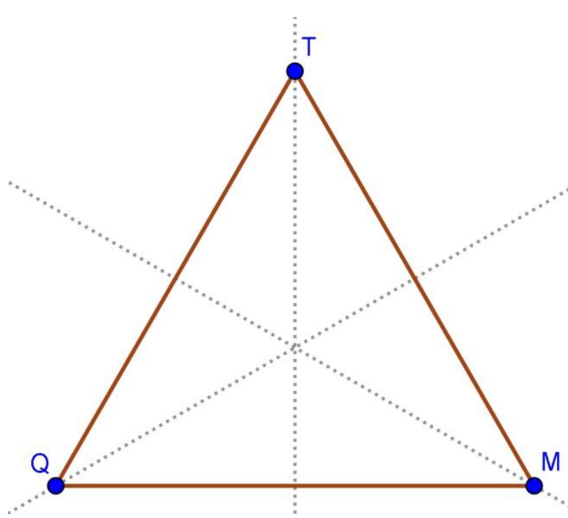
Se traza la perpendicular al segmento $\overline{QM}$ que pase por el punto T:



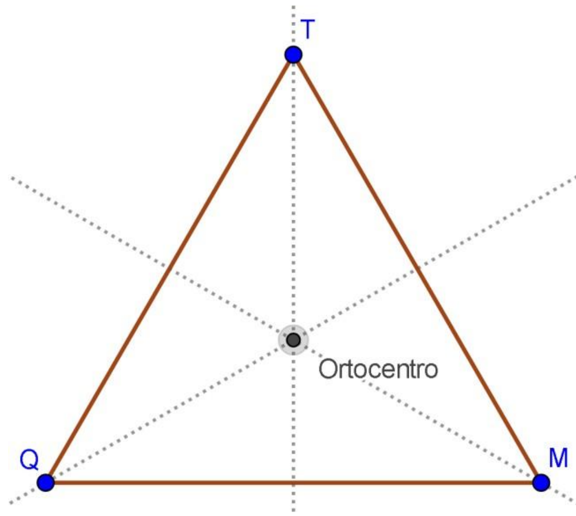
Sobre el mismo triángulo, tracemos ahora la perpendicular al segmento $\overline{TM}$ que pase por el punto Q:



Ahora tracemos la perpendicular al segmento $\overline{TQ}$ que pase por el punto M:

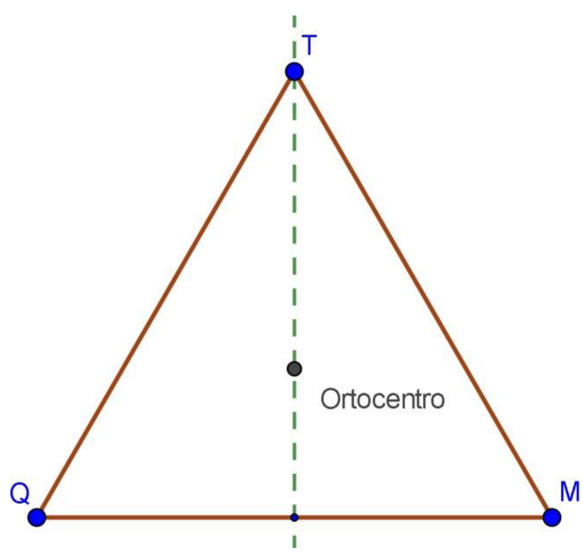


Marquemos con un punto (digamos gris) el lugar donde se intersectan las tres alturas. Ese lugar se conoce como ortocentro:

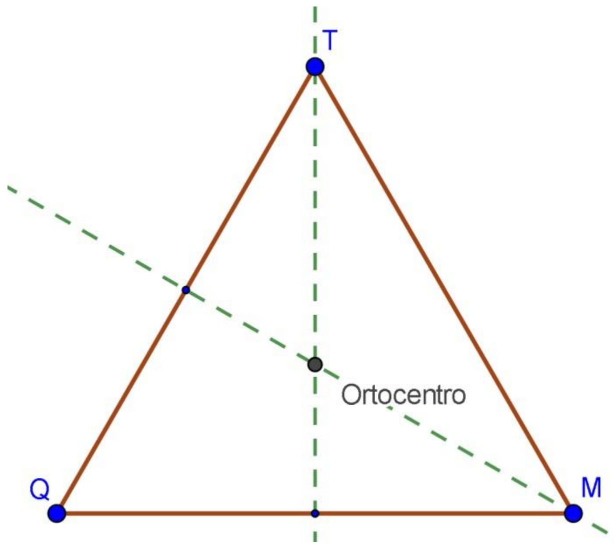


Tracemos ahora el baricentro.
El baricentro es el punto que se localiza en la intersección de las medianas. La mediana es el segmento de recta que une el punto medio del lado de un triángulo con el vértice opuesto.

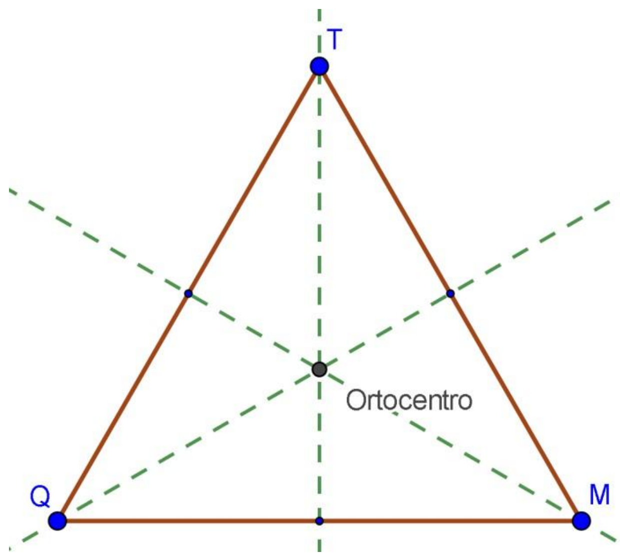
Se trabajará sobre el mismo triángulo, sin embargo, ya solo se dejará el ortocentro y se eliminarán los trazos que lo generaron. Tracemos el punto medio del segmento $\overline{QM}$ y coloquemos un segmento de recta que una dicho punto medio con el vértice T:



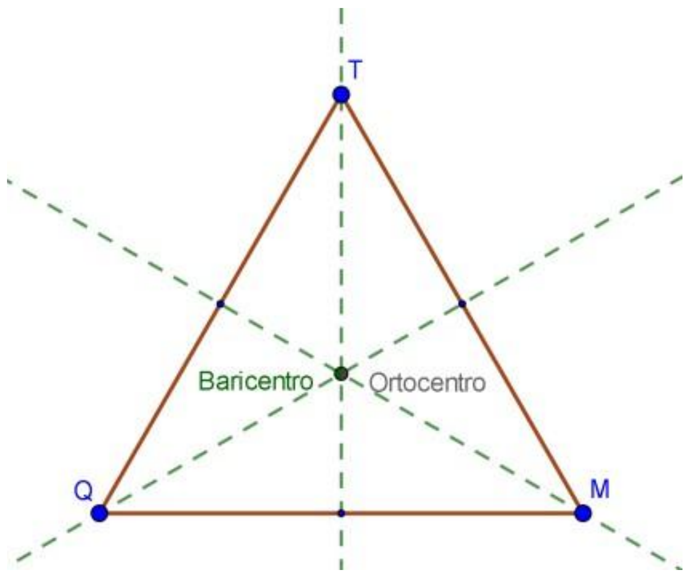
Se traza el punto medio del segmento $\overline{TQ}$ y se coloca un segmento que una dicho punto medio con el vértice M:



Ahora tracemos el punto medio del segmento $\overline{MT}$ y se coloca un segmento que una dicho punto medio con el vértice Q:

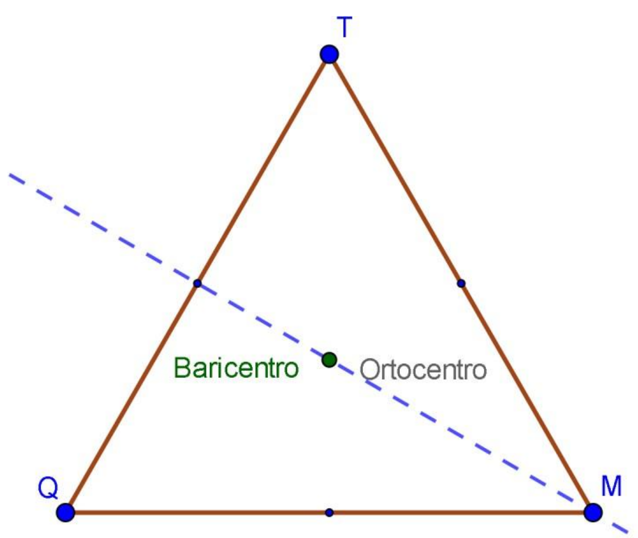


Marquemos con un punto (digamos verde) el lugar donde se intersectan las tres medianas. Ese lugar se conoce como baricentro:

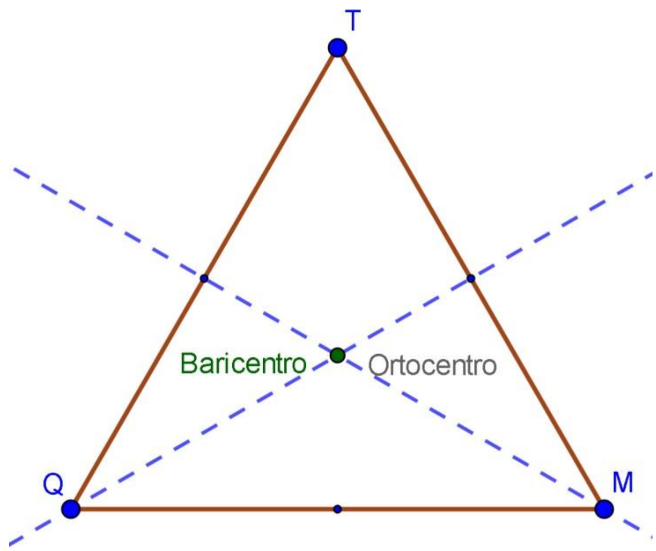


Por último, tracemos el circuncentro. El circuncentro es el punto que se sitúa en la intersección de las mediatrices. La mediatriz es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado de un triángulo.

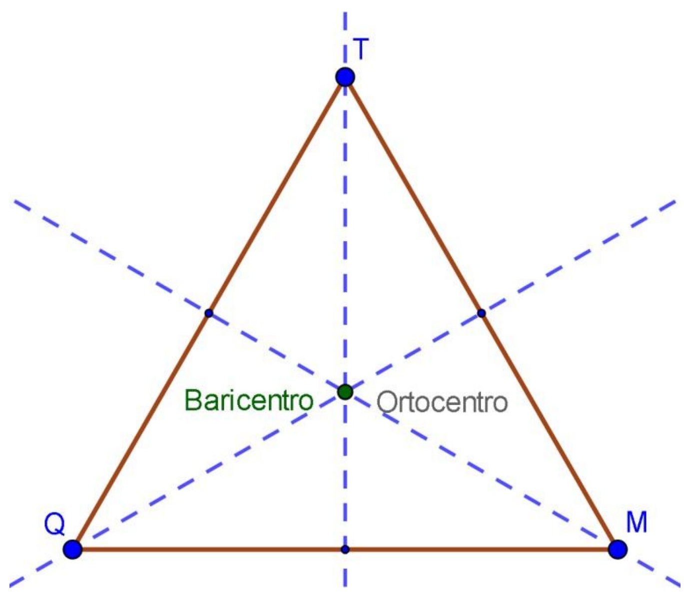
Sobre el mismo triángulo que hemos trabajado, tracemos la perpendicular del segmento $\overline{QT}$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento:



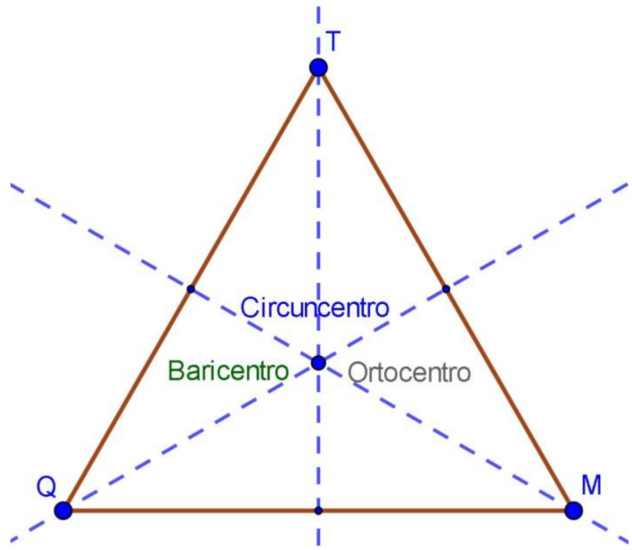
Tracemos la perpendicular del segmento $\overline{TM}$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento:



Por último, tracemos la perpendicular del segmento $\overline{QM}$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento:



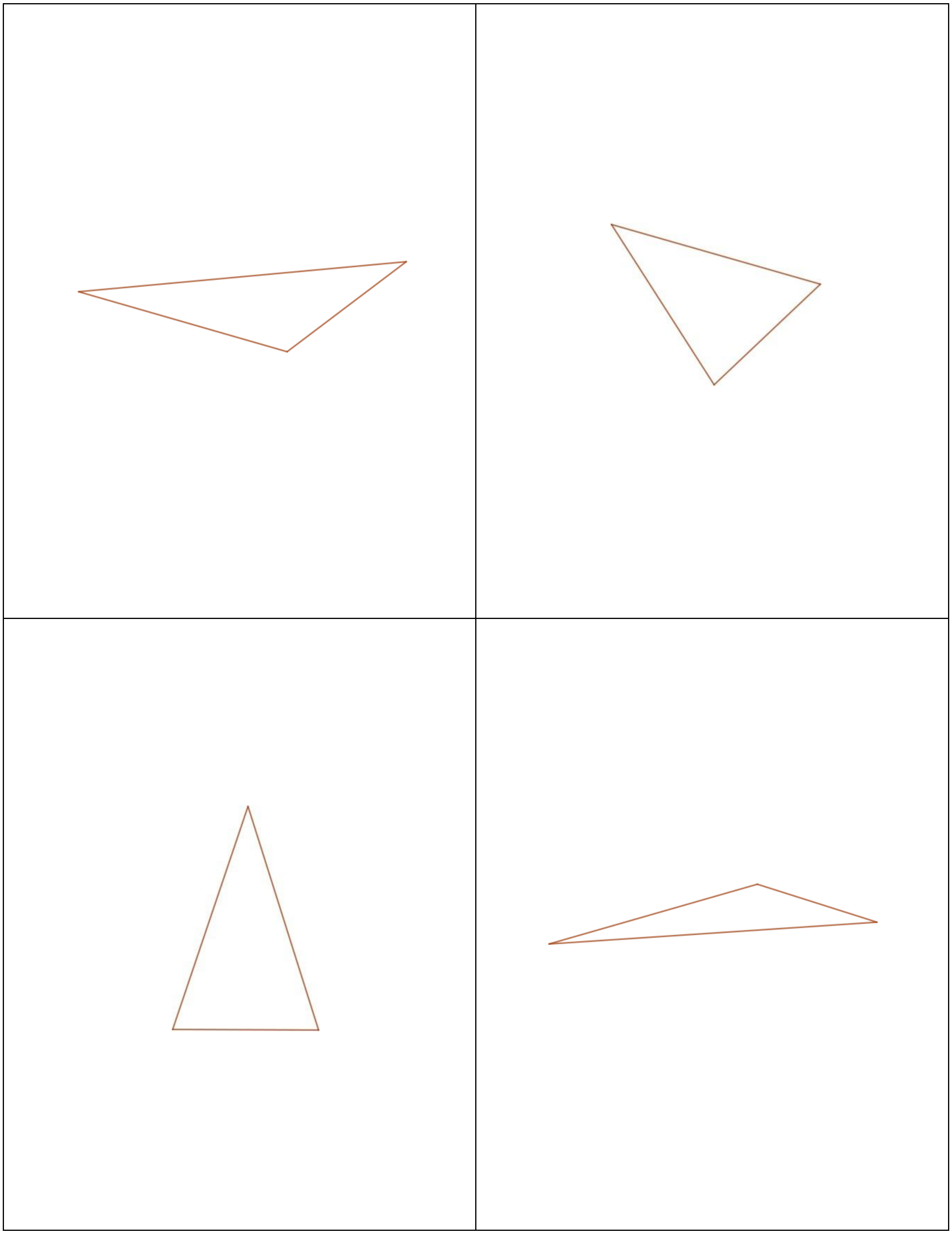
Marquemos con un punto (digamos azul) el lugar donde se intersectan las tres mediatrices. Ese lugar se conoce como circuncentro:



Una vez trazados los tres puntos notables (ortocentro, baricentro y circuncentro) se unen con una línea recta para formar la Recta de Euler. Sin embargo, como se puede comprobar, el ortocentro, el baricentro y el circuncentro coinciden en el mismo punto. Es por ello, que éste es el único caso (en un triángulo equilátero) en donde no podemos formar la Recta de Euler.

Ejercicios.

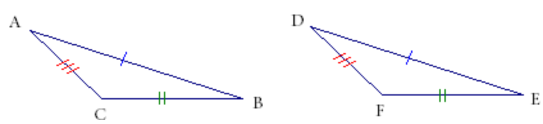
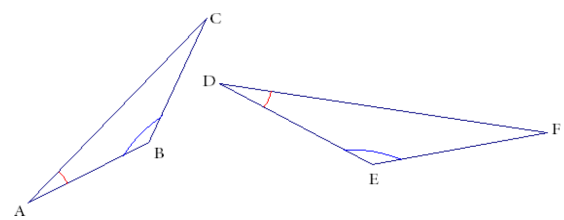
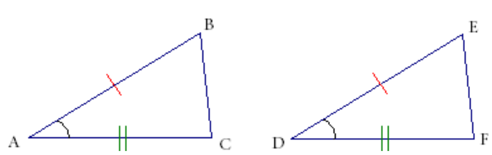
Traza la Recta de Euler en los siguientes triángulos.

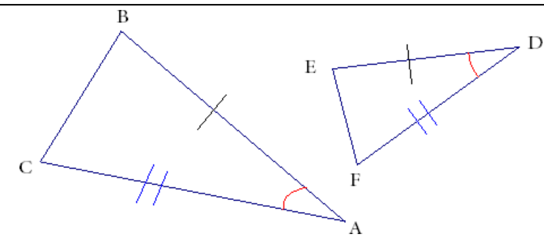


- ## Congruencia, Semejanza y Teorema de Tales

La **congruencia** en geometría se entiende como la igualdad de figuras geométricas. La noción de **semejanza** en geometría se entiende como la coincidencia de dos figuras mediante la ampliación o dilatación de las dimensiones de una de ellas.
Para denotar a dos figuras congruentes utilizamos el símbolo $\cong$. Para denotar a dos figuras semejantes utilizamos el símbolo $\sim$

Existen criterios para establecer si dos triángulos son congruentes o semejantes:

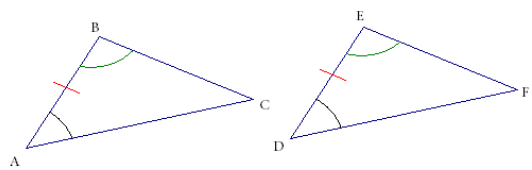
Criterios para establecer *congruencia* entre dos triángulos	Criterios para establecer *semejanza* entre dos triángulos
• **L, L, L (Lado, Lado, Lado)** Dos triángulos son congruentes, si sus lados correspondientes son iguales.  Si $AB=DE, BC=EF\ y\ AC=DF$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	• **A, A (Ángulo, Ángulo)** Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos correspondientes iguales.  Si $A=D$ y $B=E$ entonces, $\Delta\ ABC\ \Delta\ DEF$
• **L, A, L (Lado, Ángulo, Lado)** Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, son respectivamente iguales.  Si $AB=DE,\ \ A=\ \ D\ y\ AC=DF$	• **L, A, L (Lado, Ángulo, Lado)** Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y los ángulos formados por estos lados son iguales.

<table>
<tr>
<td>entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$</td>
<td>

Si $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ y $A = \quad D$ entonces,
$\Delta ABC \quad \Delta DEF$</td>
</tr>
<tr>
<td>

- **A, L, A (Ángulo, Lado, Ángulo)**

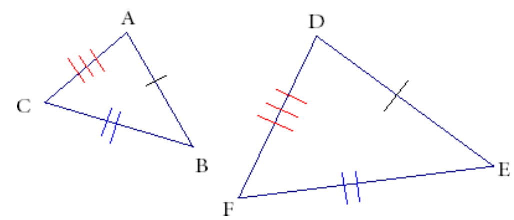
Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamente iguales.



Si $A = \quad D, AB = DE \ y \quad B = \quad E$
entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$</td>
<td>

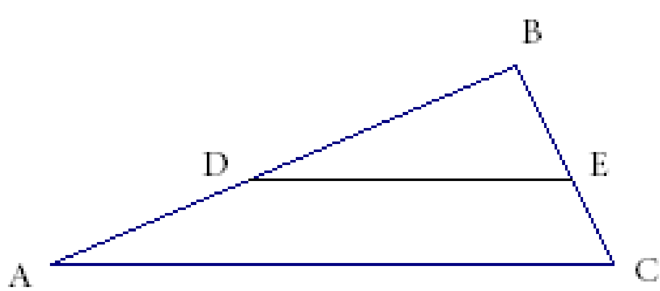
- **L, L, L (Lado, Lado, Lado)**

Dos triángulos son semejantes, si sus tres lados son proporcionales.



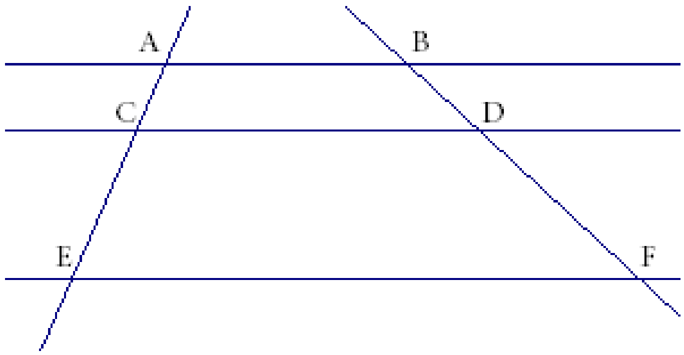
Si $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ entonces,
$\Delta ABC \quad \Delta DEF$</td>
</tr>
</table>

Ahora el **Teorema de Tales** menciona que si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.



Si $AC \parallel DE$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta DBE$

Del que se desprende que si dos rectas cualesquiera se cortan por rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.



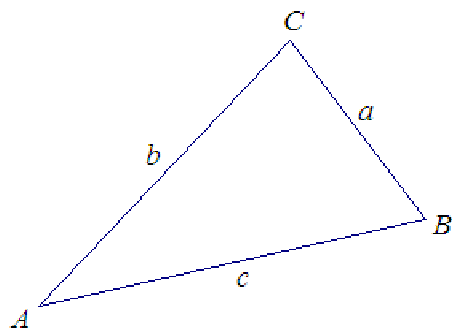
Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ entonces $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$

Basados en estos criterios, podemos determinar algunos elementos en triángulos. Lo principal (como en todo problema matemático) es comprender bien el problema y buscar entre las herramientas que se tienen para buscar una posible solución.

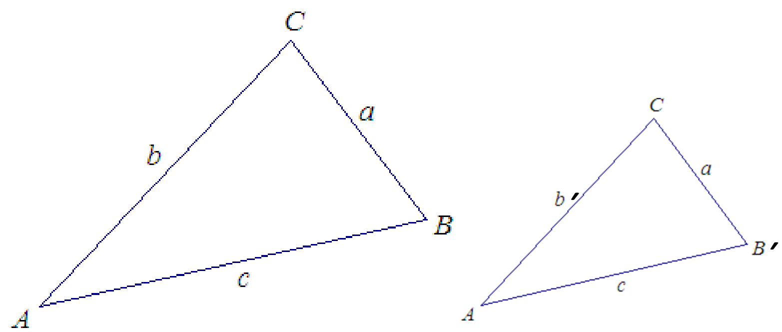
Ejemplos

1. Los lados de un triángulo miden a=26, b=18 y c=38. Si en un triángulo semejante a éste, el lado a´ mide 6.5. ¿Cuál será la longitud de los otros lados del triángulo semejante?

Recordemos que los vértices de un triángulo se denotan en letras mayúsculas (por lo general A, B y C) por lo que el triángulo con vértices ABC se le denota ΔABC; el lado opuesto a un vértice se denota con la misma letra que al vértice pero en minúscula.



Recordemos también que en un triángulo semejante a otro, regularmente el nombre de sus ángulos y lados correspondientes se denota con la misma letra con apóstrofo.



En ocasiones, como en el ejemplo, los valores de los lados del triángulo aparecen sin unidad de medida (por ejemplo no se sabe si 4 equivale a 4 centímetros o 4 metros). Cuando esto sucede, debemos dar por entendido que son unidades, así el 4 representa 4 unidades.

De acuerdo al criterio de semejanza L,L,L que menciona que dos triángulos son semejantes, si sus tres lados son proporcionales, podemos obtener la siguiente proporción:

$$\frac{a}{a´} = \frac{b}{b´} = \frac{c}{c´}$$

Encontremos la longitud del lado proporcional al lado b, tomando solo la parte de la igualdad que necesitamos:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

$$\frac{26}{6.5}=\frac{18}{b'}$$

Despejamos la incógnita b'. Lo primero, ya que la variable se encuentra dividiendo, es “pasarla al otro lado” multiplicando (como se mencionó anteriormente, formalmente multiplicamos ambos lados de la igualdad por su recíproco multiplicativo):

$$\frac{26}{6.5}=\frac{18}{b'}$$

$$\frac{26\,b'}{6.5}=18$$

Continuando con el despeje, la cantidad 6.5 que está dividiendo pasará multiplicando al otro lado de la igualdad:

$$26\,b'=(18)(6.5)$$

Por último, la cantidad 26 que está multiplicando a la incógnita pasará dividiendo al otro lado de la igualdad:

$$b'=\frac{(18)(6.5)}{26}$$

Multiplicamos 18 por 6.5:

$$b'=\frac{117}{26}$$

Dividimos 117 por 26:

$$b'=4.5$$

Ahora encontremos la longitud del lado proporcional al lado c, tomando solo la parte de la igualdad que necesitamos:

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$$

Despejamos la incógnita c'. Lo primero, ya que la variable se encuentra dividiendo, es “pasarla al otro lado” multiplicando (como se mencionó anteriormente, formalmente multiplicamos ambos lados de la igualdad por su recíproco multiplicativo):

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$
$$\frac{26}{6.5} = \frac{38}{c'}$$
$$\frac{26\,c'}{6.5} = 38$$

Continuando con el despeje, la cantidad 6.5 que está dividiendo pasará multiplicando al otro lado de la igualdad:

$$26\,c' = (38)(6.5)$$

Por último, la cantidad 26 que está multiplicando a la incógnita pasará dividiendo al otro lado de la igualdad:

$$c' = \frac{(38)(6.5)}{26}$$

Multiplicamos 38 por 6.5:

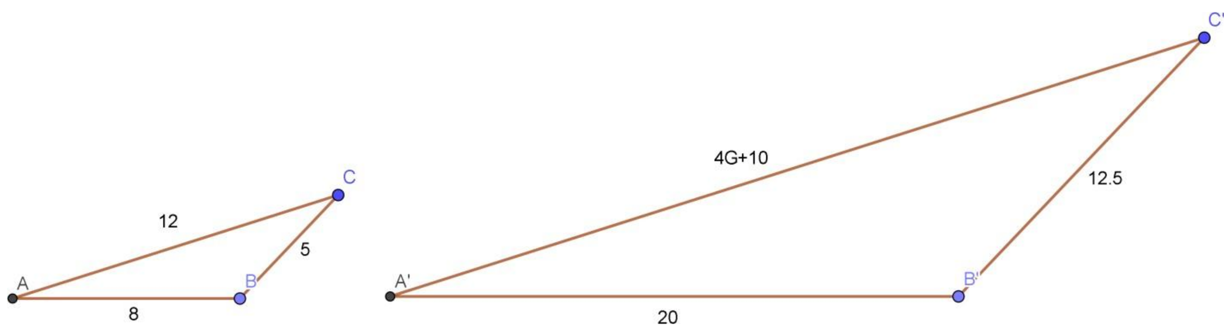
$$c' = \frac{247}{26}$$

Dividimos 247 por 26:

$$c' = 9.5$$

Por lo tanto las longitudes de los lados de un triángulo semejante al triángulo cuyos lados miden a=26, b=18 y c=38 son *a=6.5, b=4.5 y c=9.5.*

2. ¿Qué valor debe tener G para que el triángulo ΔABC sea semejante al triángulo $\Delta A'B'C'$? ¿Cuánto mide el segmento $\overline{A'C'}$?



Cuando se omite en algún ejercicio o ejemplo las unidades de medida de los lados de un triángulo, damos por entendido que son simplemente unidades. Así el 8 representa 8 unidades.

Como se puede apreciar, se conoce el valor de los tres lados del triángulo ΔABC ($\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=5$ y $\overline{AC}=12$). También, se conoce el valor de los tres lados del triángulo $\Delta A'B'C'$ ($\overline{A'B'}=20$, $\overline{B'C'}=12.5$ y $\overline{A'C'}=4G+10$).

De acuerdo al criterio de semejanza de triángulos L,L,L, dos triángulos son semejantes si sus tres lados son proporcionales. Verifiquemos entonces, las razones de los lados correspondientes de dichos triángulos. Posteriormente, igualemos las razones para verificar si son proporcionales entre ellas.

La primera razón se da entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{8}{20}$$
$$=0.4$$

La segunda razón se da entre los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{5}{12.5}$$
$$=0.4$$

La tercera razón se da entre los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\frac{12}{4G+10}$$

Ahora, igualamos dichas razones para verificar si son una proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$
$$0.4 = 0.4 = \frac{12}{4G + 10}$$

Podemos por tanto, comparar dos razones, digamos $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$, para realizar el despeje de G. Con esto encontraremos el valor de G que hará que las razones sean iguales y por ende, formen una proporción:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$
$$0.4 = \frac{12}{4G + 10}$$

Despejamos la variable. Lo primero, todo lo que se encuentra dividiendo donde esta inmiscuida la variable se "pasará al otro lado" (como se mencionó anteriormente, formalmente multiplicamos ambos lados de la igualdad por el recíproco multiplicativo):

$$0.4\left(4G + 10\right) = 12$$

Multiplicamos 0.4 por 4G+10

$$1.6G + 4 = 12$$

Despejamos la variable. "Pasamos" restando el 4 al otro lado de la igualdad (formalmente estamos aplicando el inverso aditivo de 4):

$$1.6G = 12 - 4$$
$$1.6G = 8$$

Aplicamos el inverso multiplicativo a 1.6 para despejar a G (lo que coloquialmente diríamos "como 1.6 está multiplicando G pasa dividiendo al otro lado de la igualdad"):

$$G = \frac{8}{1.6}$$
$$= 5$$

Así, G debe valer 5 para que la proporción $\frac{\overline{AB}}{\overline{A´B´}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B´C´}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A´C´}}$ sea cierta.

Verificando:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A´B´}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B´C´}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A´C´}}$$

$$0.4 = 0.4 = \frac{12}{4G+10}$$

$$0.4 = 0.4 = \frac{12}{4(5)+10}$$

$$0.4 = 0.4 = \frac{12}{20+10}$$

$$0.4 = 0.4 = \frac{12}{30}$$

$$0.4 = 0.4 = 0.4$$

Por lo tanto $G = 5$ y $\overline{A´C´} = 30$

3. En un triángulo ΔQTM sus lados miden $q = 10\ cm$, $t = 16\ cm$ y $m = 18\ cm$. Calcular los lados del triángulo semejante $\Delta Q´T´M´$ cuyo perímetro sea igual a 66 cm.

Se desea tener dos triángulos semejantes ΔQTM y $\Delta Q´T´M´$. Según el criterio L,L,L dos triángulos son semejantes si sus tres lados son proporcionales. Si los lados son proporcionales, la suma de ellos (y por ende el perímetro) también lo es.

Del triángulo ΔQTM:	Del triángulo $\Delta Q´T´M´$:
$q + t + m = 10\ cm + 16\ cm + 18\ cm = 44\ cm$	$q´ + t´ + m´ = 66\ cm$

Por lo que la razón entre el perímetro del triángulo ΔQTM y el perímetro del triángulo $\Delta Q´T´M´$ es:

$$\frac{P_{\Delta QTM}}{P_{\Delta Q'T'M'}} = \frac{44\ cm}{66\ cm}$$

$$= \frac{2}{3}$$

A este valor podemos llamarle constante de proporcionalidad. Bajo este supuesto, a cada una de las razones entre los lados correspondientes de los triángulos ΔQTM y $\Delta Q'T'M'$ deben ser igual a dicho valor. Así, la primera proporción entre los lados q y q´ y dicha constante de proporcionalidad sería:

$$\frac{q}{q'} = \frac{2}{3}$$

Pero $q = 10\ cm$**:**

$$\frac{10\ cm}{q'} = \frac{2}{3}$$

Al despejar, q´ "pasa multiplicando" al otro lado de la igualdad (como se ha explicado en reiteradas ocasiones, formalmente se multiplica por el inverso multiplicativo)

$$10\ cm = \frac{2q'}{3}$$

Generalmente, la variable que se desea despejar se coloca al lado izquierdo de la igualdad:

$$\frac{2q'}{3} = 10\ cm$$

Continuando con el despeje el 3 pasa al otro lado de la igualdad:

$$2q' = (3)10\ cm$$

Se multiplica:

$$2q' = 30\ cm$$

Se despeja q´:

$$q' = \frac{30\ cm}{2}$$

Dividimos:

$$\boxed{q' = 15\ cm}$$

La segunda proporción entre los lados t y t´ y dicha constante de proporcionalidad sería:

$$\frac{t}{t´} = \frac{2}{3}$$

Pero $t = 16\ cm$ **:**

$$\frac{16\ cm}{t´} = \frac{2}{3}$$

Al despejar, t´ "pasa multiplicando" al otro lado de la igualdad (como se ha explicado en reiteradas ocasiones, formalmente se multiplica por el inverso multiplicativo)

$$16\ cm = \frac{2t´}{3}$$

Generalmente, la variable que se desea despejar se coloca al lado izquierdo de la igualdad:

$$\frac{2t´}{3} = 16\ cm$$

Continuando con el despeje el 3 pasa al otro lado de la igualdad:

$$2t´ = (3)16\ cm$$

Se multiplica:

$$2t´ = 48\ cm$$

Se despeja *t´*:

$$t´ = \frac{48\ cm}{2}$$

Dividimos:

$$\boxed{t´ = 24\ cm}$$

Y la tercera proporción entre los lados *m* y *m´* y dicha constante de proporcionalidad sería:

$$\frac{m}{m´} = \frac{2}{3}$$

Pero $m = 18\ cm$ **:**

$$\frac{18\ cm}{m'} = \frac{2}{3}$$

Al despejar, *m´* “pasa multiplicando” al otro lado de la igualdad (como se ha explicado en reiteradas ocasiones, formalmente se multiplica por el inverso multiplicativo)

$$18\ cm = \frac{2m'}{3}$$

Generalmente, la variable que se desea despejar se coloca al lado izquierdo de la igualdad:

$$\frac{2m'}{3} = 18\ cm$$

Continuando con el despeje el 3 pasa al otro lado de la igualdad:

$$2m' = (3)18\ cm$$

Se multiplica:

$$2m' = 54\ cm$$

Se despeja *m´*:

$$m' = \frac{54\ cm}{2}$$

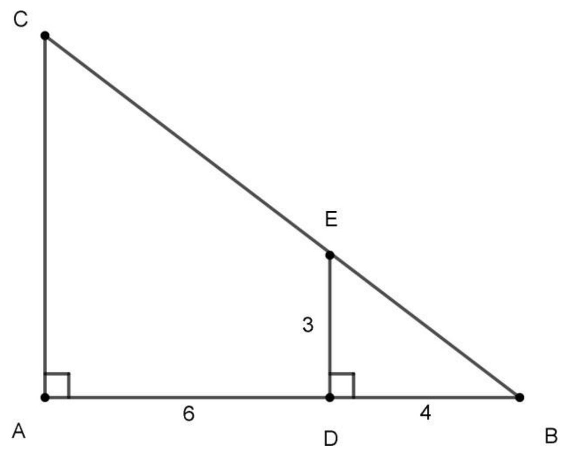
Dividimos:

$$\boxed{m' = 27\ cm}$$

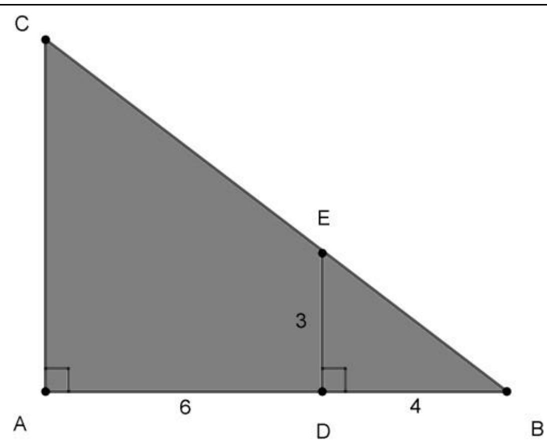
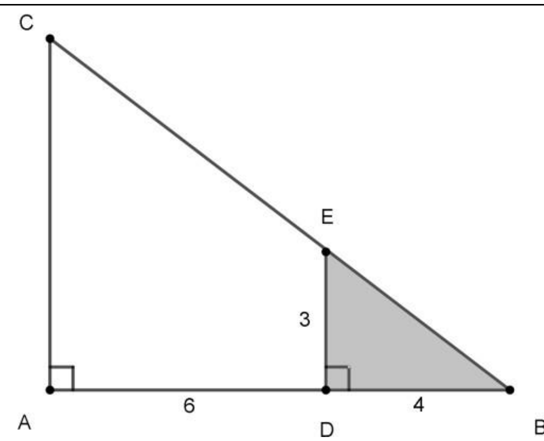
Verifiquemos que la suma de los lados obtenidos del triángulo da 66 cm:

$$q' + t' + m' = 66\ cm$$
$$(15\,cm) + (24\,cm) + (27\ cm) = 66\,cm$$
$$66\ cm = 66\,cm$$

4. Dada la siguiente figura, determina el valor del segmento $\overline{AC}$



Si se observa bien la figura, se podrá notar que está formada por el triángulo ΔABC y por el triángulo ΔDBE :

	
Triángulo ΔABC	Triángulo ΔDBE

Verifiquemos primero que ambos triángulos son semejantes. De acuerdo al criterio de semejanza A,A, dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos correspondientes iguales. Podemos verificar que el ángulo $\sphericalangle B$ es el mismo tanto en el triángulo ΔABC como en el triángulo ΔDBE. También observa que el ángulo $\sphericalangle A$ del triángulo ΔABC mide 90° y el ángulo $\sphericalangle D$ del triángulo ΔDBE mide también 90°.

Así, dado que $\sphericalangle B = \sphericalangle B$ y $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ por el criterio A,A los triángulos son semejantes $\Delta ABC \sim \Delta DBE$.

Verificado el supuesto de semejanza, sabemos que en triángulos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales. En este sentido:

- el lado $\overline{AB}$ del triángulo ΔABC es proporcional al lado $\overline{DB}$ del triángulo ΔDBE ;
- el lado $\overline{AC}$ del triángulo ΔABC es proporcional al lado $\overline{DE}$ del triángulo ΔDBE ; y
- el lado $\overline{BC}$ del triángulo ΔABC es proporcional al lado $\overline{BE}$ del triángulo ΔDBE .

Como:

$$\begin{aligned}\overline{AB = AD + DB}\\ = 6 + 4\\ = 10\end{aligned} \qquad DB = 4 \qquad \overline{DE = 3}$$

Para encontrar el valor del lado $\overline{CA}$ podemos aplicar la proporción $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DE}}$ ya que todos (excepto $\overline{CA}$) son valores conocidos.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DE}}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{\overline{CA}}{3}$$

Ordenando términos:

$$\frac{\overline{CA}}{3} = \frac{10}{4}$$

Despejando:

$$\overline{CA} = \frac{(3)10}{4}$$

Realizando operaciones:

$$\overline{CA} = \frac{30}{4}$$
$$= 7.5$$

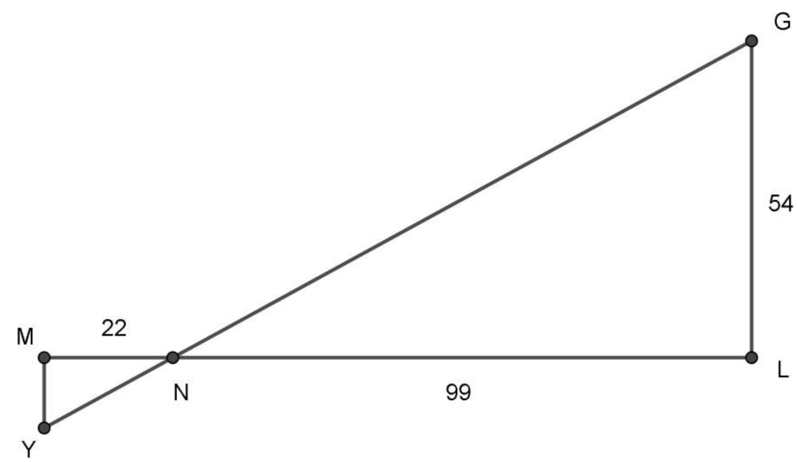
Por lo tanto el lado $\overline{CA} = 7.5$

Ejercicios.

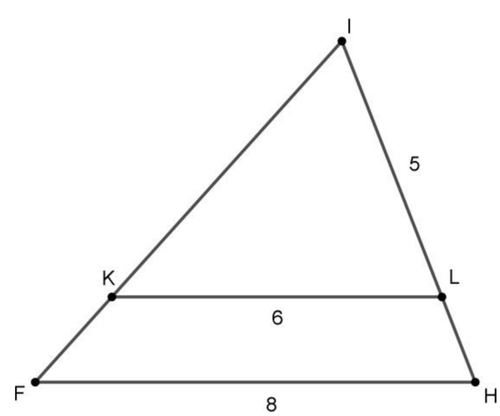
1. Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Calcula el valor de los lados de un triángulo semejante a éste, cuyo lado mayor mida 17.5 cm.

2. Los lados de un triángulo miden 8.3 cm, 5.8 cm y 7.2 cm. Calcula el valor de los lados de un triángulo semejante a éste, cuyo perímetro sea 85.2 cm.

3. Determina el valor del lado $\overline{MY}$ sabiendo que $\overline{MY}$ y $\overline{GL}$ son paralelos.



4. Determina el valor del lado $\overline{LH}$ en la siguiente figura:



- ## Teorema de Pitágoras

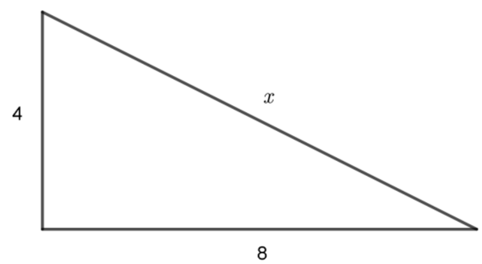
El **Teorema de Pitágoras** menciona que en todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Donde *a* y *b* son los catetos y *c* la hipotenusa.

Ejemplos

1. Calcular el valor de lado faltante en el siguiente triángulo rectángulo:



Nuevamente, cuando los lados de un triángulo aparecen sin unidad de medida, se da por entendido que, damos por entendido que son simplemente unidades.

Se observa que el valor faltante es el de la hipotenusa, de ahí que de la fórmula tengamos que despejar c:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Acomodando variables (ya que generalmente la variable a encontrar se coloca en el lado izquierdo de la igualdad):

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad

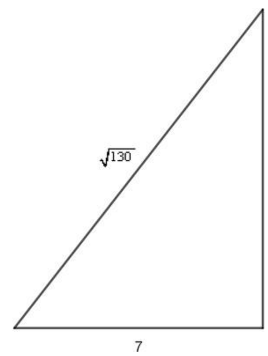
$$\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sustituyendo valores (en este caso es indistinto cuál de los dos valores se le asigne a cada cateto, por ejemplo podemos definir que a=4 y b=8):

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{(4)^2 + (8)^2} \\ &= \sqrt{16+64} \\ &= \sqrt{80} \\ &\approx 8.94 \end{aligned}$$

2. Calcular el valor de lado faltante en el siguiente triángulo rectángulo:



Cuando los lados de un triángulo aparecen sin unidad de medida, se da por entendido que, damos por entendido que son simplemente unidades. Se observa que el valor faltante es uno de los catetos, digamos a, de ahí que de la fórmula tengamos que despejarla:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 &= c^2 - b^2 \end{aligned}$$

Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= \sqrt{c^2 - b^2} \\ a &= \sqrt{c^2 - b^2} \end{aligned}$$

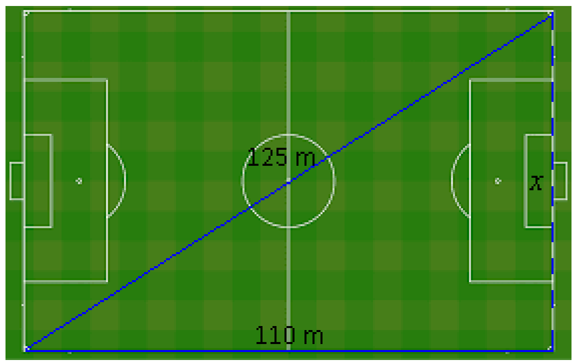
Sustituyendo valores (en cualquier caso es necesario que c sea la literal que se le asigne a la hipotenusa, así $c = \sqrt{130}$ y $b = 7$):

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(\sqrt{130})^2 - (7)^2} \\ &= \sqrt{130-49} \\ &= \sqrt{81} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el lado faltante mide 9 unidades.

3. Una cancha de futbol mide 110 metros de largo. Si la longitud de su diagonal es de 125 metros, ¿cuál es el ancho de la cancha?

Para este caso, conviene realizar una representación de lo mencionado en el problema:



Como se aprecia, dicho problema podemos trasladarlo al ámbito de las matemáticas para la resolución del triángulo aplicando el teorema de Pitágoras, donde lo que se requiere calcular es un cateto (digamos b):

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$

Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad:

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

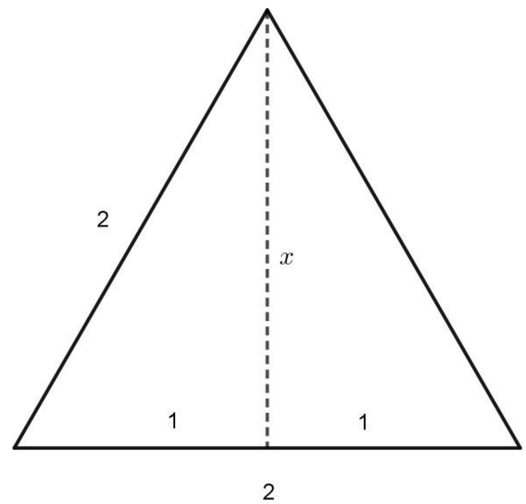
Sustituyendo valores (en cualquier caso será necesario que c sea la literal que se le asigne a la hipotenusa, así $c = 125$ y $a = 110$):

$$b = \sqrt{(125)^2 - (110)^2}$$
$$= \sqrt{15625 - 12100}$$
$$= \sqrt{3525}$$
$$= 59.37$$

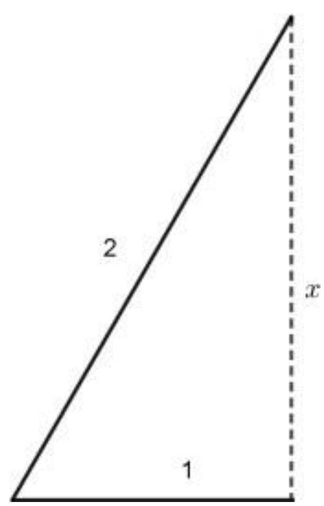
Por lo que el ancho de la cancha de futbol es de 59.37 metros.

4. La cara frontal de una casa de campaña es un triángulo equilátero con base de 2 metros, ¿cuál es la altura de la casa de campaña?

Realizamos una representación de la situación:



De esta forma nos podemos percatar, que la altura de la casa de campaña la podemos obtener al calcular un cateto (digamos a) en el siguiente triángulo rectángulo:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Sustituyendo valores (en cualquier caso es necesario que c sea la literal que se le asigne a la hipotenusa, así $c = 2$ y $b = 1$):

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(2)^2 - (1)^2} \\ &= \sqrt{4-1} \\ &= \sqrt{3} \\ &= 1.73 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura de la casa de campaña es de 1.73 metros.

Ejercicios.

1. Una escalera de 2.7 metros de largo se apoya en una pared vertical de modo que el pie de la escalera está a 1.3 metros de esa pared. Calcula la altura que alcanza la escalera sobre la pared.

2. El dormitorio de Héctor es rectangular con medidas de sus lados 4 y 5 metros. Si desea colocar una cuerda que atraviese el dormitorio y que esté amarrada a dos esquinas opuestas, ¿cuál es la longitud de la cuerda?

3. ¿Cuál es el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 6 cm y 8 cm?

4. En una rampa inclinada una persona avanza una distancia de 50 metros. Al llegar al final de dicha rampa, observa que avanzó una distancia horizontal de 40 metros ¿a qué altura está la rampa?

Créditos

Iraís Dalila Reyes Cruz

Directora General de Telebachillerato

Julián Cruz Champala

Subdirector Técnico

José Peña Cerezo

Subdirector de Evaluación y Supervisión Escolar

Rodrigo José Álvarez Montero Méndez

Jefe del Departamento Técnico Pedagógico

Joaquin Vasquez Pérez

Jefe de la Oficina de Planeación Educativa

Juan Luis Uscanga Salazar

Jefe de la Oficina de Desarrollo Educativo

Gonzalo Jácome Cortés

Elaboración del Cuadernillo

TEBAEV

Telebachillerato de Veracruz

VERACRUZ GOBIERNO DEL ESTADO

SEV Secretaría de Educación

VERACRUZ ME LLENA DE ORGULLO